Решения задач 11 класса.

1. Мальчик поднимается в гору со скоростью 1 м/с. Когда до вершины остается идти 100 м, мальчик отпускает собаку, и она начинает бегать между мальчиком и вершиной горы. Собака бежит к вершине со скоростью 3 м/с, а возвращается к мальчику со скоростью 5 м/с. Какой путь успеет пробежать собака до того, как мальчик достигнет вершины?

Решение.

Пусть скорость мальчика равна v, скорость собаки вверх − v_1, вниз − v_2. Отношение пути S_c, который пробегает собака в течение одного своего пробега туда и обратно, к пути S, который за это время проходит мальчик, постоянно (зависит только от скоростей). (Это можно получить как из последующих вычислений, так и из графических соображений).
Путь, который пробегает собака за один такой пробег, уменьшается до нуля по мере подхода мальчика к вершине. Поэтому искомый полный путь собаки равен

$$S_c/S \times 100 \text{ м},$$

т.к. полный путь мальчика 100 м.
Пусть в момент очередной встречи собаки с мальчиком их отделяет от вершины расстояние L, τ − время до следующей встречи. Время, за которое собака добегает до вершины равно L/v_1. Следовательно, собака возвращается от вершины до мальчика за время $(\tau - L/v_1)$.
Собака бежит до вершины расстояние L, затем возвращается на расстояние

$$v_2(\tau - L/v_1).$$

Мальчик при этом проходит расстояние vτ.

$$v\tau = L - v_2(\tau - L/v_1),$$

следовательно

$$\tau = L(1 + v_2/v_1)/(v + v_2) = 4L/9 \text{ с/м}.$$

Отношение пути собаки к пути, пройденному мальчиком, равняется:

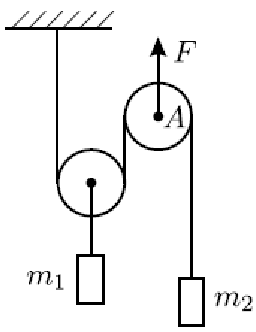
$$S_c/S = (L + v_2(\tau - L/v_1))/(v\tau) = 7/2.$$

Откуда

$$S_c = (7/2)S = (7/2) \times 100 \text{ м} = 350 \text{ м}.$$

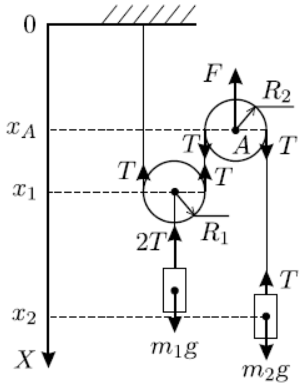
Ответ: S_c = 350 м.

2. В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трение отсутствует. Массы грузов равны m_1 и m_2. Найдите ускорение оси блока A, к которой приложена в вертикальном направлении сила F. Ускорение свободного падения равно g.



Решение.

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке крепления нити к потолку, направим координатную ось X вниз и запишем уравнения движения грузов m_1, m_2 и блока A в проекциях на эту ось. Учтём при этом, что ввиду невесомости нити и блоков сила натяжения T по всей её длине одинакова.



$$m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot g - 2T;$$
$$m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot g - T;$$
$$F = 2T.$$

Здесь a_1 и a_2 – ускорения грузов m_1 и m_2 соответственно.

Для того чтобы решить данную систему, необходимо получить уравнение, связывающее эти ускорения – уравнение кинематической связи. Это можно сделать, использовав нерастяжимость нити. Обозначим координаты оси нижнего блока, груза m_2 и оси верхнего блока через x_1, x_2 и x_A соответственно. Тогда длина нити L выразится следующим образом:

$$L = x_1 + \pi R_1 + (x_1 - x_A) + \pi R_2 + (x_2 - x_A).$$

Отметим, что радиусы нижнего и верхнего блоков R_1 и R_2 являются постоянными величинами. Данное соотношение справедливо для любого момента времени.

Пусть за малый промежуток времени Δt координаты оси нижнего блока, груза m_2 и оси верхнего блока изменились и стали равны x_1', x_2' и x_A' соответственно. Тогда можно записать:

$$L = x_1' + \pi R_1 + (x_1' - x_A') + \pi R_2 + (x_2' - x_A').$$

Вычитая друг из друга два последних уравнения, деля разность на Δt и учитывая, что отношение $(x' - x)/\Delta t$ представляет собой скорость, найдём связь между скоростями оси нижнего блока, груза m_2 и оси верхнего блока: $2v_1 + v_2 = 2v_A$. Рассматривая аналогичным образом малые изменения скоростей за время Δt, можно убедиться, что ускорения a_1 и a_2 и a_A связаны аналогичным соотношением:

$$2a_1 + a_2 = 2a_A.$$

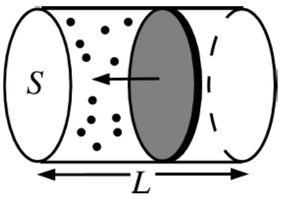
Это и есть уравнение кинематической связи.

Решая уравнения движения с учётом полученного уравнения кинематической связи, найдём ускорение оси верхнего блока:

$$a_A = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1m_2}F.$$

Отметим, что при некоторых соотношениях величин m_1, m_2 и F (в частности, при очень малых F) ускорение точки A может быть больше ускорения свободного падения g. Это связано с тем, что блок невесом, и на него действуют силы F и 2T, равные в сумме нулю, так что его ускорение может быть как меньше, так и больше g.

3. В горизонтально расположенном цилиндре длиной *L* площадью основания S находятся *N* молекул идеального газа. Давление газа p_0. В газ попали маленькие пылинки. Чтобы их собрать, через цилиндр пропускают фильтр (см. рис). Концентрация пылинок в сосуде мала и равна *n*. Какую минимальную силу надо прикладывать к фильтру, чтобы медленно протащить его через цилиндр? Считайте, что газ свободно проходит через фильтр, а пылинки к нему прилипают. Силой тяжести пренебречь.



Давление газа в цилиндре связано с его температурой основным соотношением молекулярно-кинетической теории:

$$p_0 = \frac{N}{SL}kT,$$

здесь $N/(SL)$ представляет собой концентрацию молекул газа, T — его температура.

Висящая в газе пыль представляет собой броуновские частицы. При этом в процессе хаотического столкновения с молекулами газа, пылинки приобретают некоторую скорость.

Введем температуру, которая характеризует среднюю кинетическую энергию движения пылинок. Равновесие в системе “пыль-газ” наступает, когда эта температура сравнивается с температурой газа T (которая, в свою очередь, характеризует среднюю кинетическую энергию молекул газа).

Иными словами, пылинки будут вести себя как идеальный одноатомный газ, парциальное давление которого p_n связано с его температурой формулой

$$p_n = nkT.$$

Разделив почленно полученные уравнения друг на друга, получим

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{N}{SLn} \qquad => \qquad p_n = \frac{p_o SLn}{N}.$$

При движении фильтра молекулы газа беспрепятственно проходят сквозь фильтр, и, следовательно, не влияют на него. Выясним, как будет воздействовать на фильтр пылевой газ.

Как известно, давление газа на стенку создается импульсом, который передается стенке отскакивающими от нее молекулами. Однако, при воздействии пыли на фильтр, пылинки прилипают к нему. Значит, каждая пылинка передает фильтру в два раза меньший импульс по сравнению с случаем, когда пылинки отражаются.

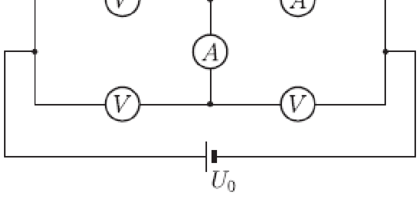
Значит, давление пылинок на фильтр в два раза меньше, чем на стенку, от которой пылинки отражаются. Сила, с которой пылинки тормозят фильтр, равна

$$F = \frac{p_n S}{2} = \frac{S^2 L n p_0}{2N}.$$

Такую же силу надо приложить к фильтру, чтобы протащить его медленно через газ.

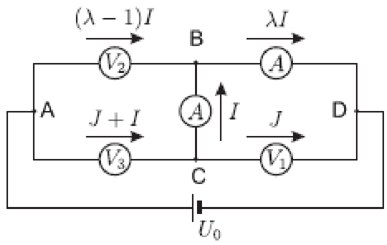
Ответ: Сила равна $F = (S^2 L n p_0)/(2N)$.

4. Электрическая цепь, состоящая из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров (см. рис.), подключена к источнику питания с напряжением U_0 = 1,3 В. Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Каким может быть отношение сопротивлений вольтметра и миллиамперметра? Считая, что сопротивление вольтметра больше сопротивления миллиамперметра, определите показания каждого из вольтметров.



Решение.

Пусть I – это ток через миллиамперметр, включенный в диагональ мостика, тогда λI – ток через другой миллиамперметр (см. рис.) Возможные значения параметра λ равны 3, 1/3, -3 и -1/3. Токи через вольтметры обозначим, согласно закону сохранения заряда, как J, $(\lambda -1)I$ и $J+ I$. Обозначим через R_A и R_V сопротивления миллиамперметра и вольтметра.



Из закона Ома для участка цепи ABC получим

$$(J+I)R_V + I R_A = (\lambda-1) I R_V \ .$$

Из закона Ома для участка цепи CBD получим

$$J R_V = I R_A + \lambda I R_A \ .$$

Подставляя второе соотношение в первое, получаем:

$$(\lambda+2) I R_A = (\lambda-2) I R_V \ \text{ и}$$

$$\frac{R_V}{R_A} = \frac{\lambda+2}{\lambda-2} \ .$$

При $\lambda = 1/3$ и $\lambda = -1/3$ отношение сопротивлений оказывается отрицательным, следовательно, эти случаи невозможны. В остальных случаях имеем: $\frac{R_V}{R_A} = 5$ при $\lambda = 3$ и $\frac{R_V}{R_A} = \frac{1}{5}$ при $\lambda = -3$. Поскольку по условию задачи сопротивление вольтметра больше сопротивления миллиамперметра, имеем $\frac{R_V}{R_A} = 5$, $\lambda = 3$.

Отсюда мы находим токи, текущие через вольтметры V_1, V_2 и V_3:

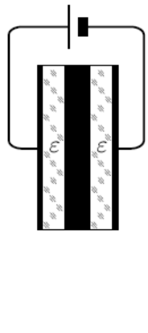
$$J = (\lambda+1) I \frac{R_A}{R_V} = \frac{4}{5} I \ ,$$

$$(\lambda-1) I = 2I \ ,$$

$$J + I = \frac{9}{5} I \ .$$

Следовательно, показания этих вольтметров V_1, V_2 и V_3 относятся как числа 4/5, 2 и 9/5. Поскольку $U_1 + U_3 = U_0 = 1{,}3$ В, получаем $U_1 = 0{,}4$ В, $U_2 = 1$ В, $U_3 = 0{,}9$ В.

5. Обкладки плоского конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения. При этом они притягиваются с силой F_0. С какой силой будут притягиваться эти обкладки, если в конденсатор ввести две диэлектрические и одну металлическую пластины (см. рисунок)? Толщина каждой из пластин чуть меньше 1/3 расстояния между пластинами конденсатора. Относительная диэлектрическая проницаемость крайних пластин равна ε.



Решение.

Пусть после того, как в конденсатор внесли пластины, напряжённость электрического поля около его обкладок вне диэлектрика стала равна *E*. Тогда напряжённость поля внутри диэлектрических пластин стала равна $E' = E/\varepsilon$, а разность потенциалов между каждой из обкладок и металлической пластиной $\varphi' = \frac{d}{3}E' = \frac{Ed}{3\varepsilon}$.

Поскольку исходный конденсатор с вставленной в него металлической пластиной можно рассматривать, как два последовательно соединённых конденсатора, заряженных до разности потенциалов φ' каждый, то разность потенциалов между обкладками исходного конденсатора равна просто $2\varphi'$. С другой стороны, исходный конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения с ЭДС, равной U. Поэтому $U = 2\varphi' = \frac{2Ed}{3\varepsilon}$. Отсюда $E = \frac{3\varepsilon U}{2d}$.

Так как сила притяжения обкладок друг к другу пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля, то $\frac{F}{F_0} = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2$. Здесь $E_0 = U/d$ – напряжённость электрического поля между обкладками конденсатора до того, как в него были вставлены пластины, *F* – искомая сила. Принимая во внимание выражение для *E*, получим ответ:

$$F = F_0\left(\frac{3\varepsilon}{2}\right)^2.$$