2016/2017 учебного года
Харьковская область
8 класс

Каждая задача — 5 баллов. Решения в общем виде оцениваются выше, чем только в числах.

1. Межгалактический злодей профессор Рутилус обнаружил, что для завершения построения его ужасающего оружия не хватает одного компонента – вечно свежего сэндвича с неизвестной планеты в системе Горящих Буррито-3. Звездолёт несётся с постоянной скоростью по гиперпространственому течению и добирается от базы профессора до необходимой планеты за 2 часа. Обратный путь против течения занял 3 часа. По окончанию путешествия профессор задался вопросом, во сколько же раз скорость звездолёта больше скорости гиперпространственого течения?

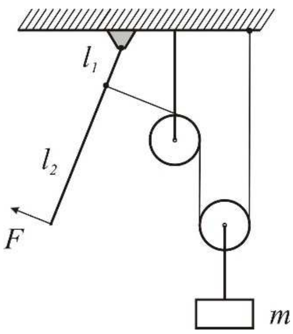
Решение

Пусть v и u обозначают скорости звездолёта и течения соответственно, а t_1 и t_2 – время движения по течению и против него соответственно. Из равенства расстояний, пройденных по течению и против него, получаем следующее уравнение:

$$(v+u)\,t_1 = (v-u)\,t_2$$

Деля левую и правую части на u: $(\frac{v}{u}+1)\,t_1 = (\frac{v}{u}-1)\,t_2$. Разрешая это уравнения относительно $\frac{v}{u}$, находим:

$$\frac{v}{u} = \frac{t_2+t_1}{t_2-t_1} = 5$$



2. Во время странствия в поисках древнего мастера, звездолёт галактического стража Теуса Тида застрял в безмассовых болотах Атлантоса. Герой, недолго думая, соорудил конструкцию, показанную на рисунке слева. С какой силой F нужно толкать рычаг, чтобы удерживать звездолёт массой m от дальнейшего погружения? Ускорение свободного падения на планете равно g.

Решение

Рассмотрим условие равновесия подвижного блока:

$$mg = 2T,$$

где T – сила натяжения нити. В связи с тем, что неподвижный блок не даёт выигрыша в силе, то с силой T нить действует на рычаг в точке, на расстоянии l_1 от точки опоры.

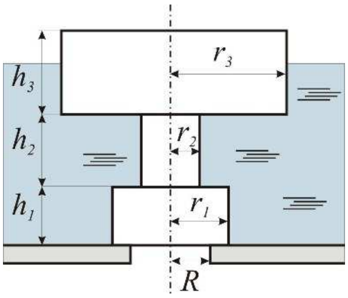
Выпишем правило рычага для точек приложения сил:

$$Tl_1 = F(l_1 + l_2)$$

Из этих двух уравнений выражаем F:

$$F = \frac{mgl_1}{2(l_1 + l_2)}$$

3. Однажды профессор Рутилус проводил опыты по изучению закона Архимеда. Он приклеил друг к другу три цилиндра, так, что их оси совпали. Радиусы и высоты цилиндров были равны *r_1=1,5 см* и *h_1=0,5 см,r_2=1 см* и *h_2 = 2 см*, *r_3=10см* и *h_3=24,5см*. Масса всей конструкции составила *m=0,5 кг*. Профессор водрузил полученную конструкцию над центром круглого отверстия радиусом*R=1 см* на дне аквариума и начал заполнять аквариум водой, как показано на рисунке слева. Поднимется ли конструкция и, если да, то при какой минимальной высоте уровня воды? Атмосферное давление *P=100 кПа* действует на систему и сверху, и снизу по площади отверстия, но к дну аквариума цилиндр прилегает плотно, и по площади контакта давления воздуха не испытывает.



Решение

На поршень вниз действуют такие силы:

- сила тяжестиmg;
- сила давления воды и воздуха на верхнюю грань нижнего цилиндра $\pi(r_1^2 - r_2^2)(P + (h - h_1)\rho g)$;
- сила давления воздуха на верхнюю грань верхнего цилиндра$\pi P r_3^2$.

Вверх действуют силы:

- давление воздуха через отверстие$\pi P R^2$;
- сила давления воды и воздуха на нижнюю грань верхнего цилиндра $\pi(r_3^2 - r_2^2)(P + (h - h_1 - h_2)\rho g)$;
- сила нормальной реакции опоры дна N.

Условие равновесия поршня:

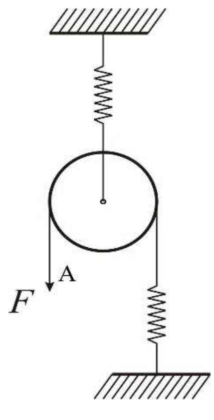
$$\pi P R^2 + \pi(r_3^2 - r_2^2)(P + (h - h_1 - h_2)\rho g) + N = \pi P r_3^2 + \pi(r_1^2 - r_2^2)(P + (h - h_1)\rho g) + mg$$

Поршень начнёт приподыматься, когда $N = 0$.Получаем уравнение для высоты, решаем его и находим:

$$h = \frac{\pi P(r_1^2 - R^2) + \pi\rho g\big((r_3^2 - r_1^2)h_1 + (r_3^2 - r_2^2)h_2\big) + mg}{\pi\rho g(r_3^2 - r_1^2)} = 17 \text{ см}$$

Эта высота меньше суммарной высоты конструкции (27 см). Значит, констрекция всплывёт при $h = 17$ см.

4. Каждый злодей, чтобы успешно противостоять героям, должен всегда быть в хорошей физической форме. У профессора Рутилуса тренажёр состоит из блока, подвешенного на пружине жёсткостью *k,* через который перекинута нить и прикреплена к закреплённой пружине с жёсткостью *k*. Максимальная сила, которую может приложить Рутилус, равна *F*. Определить, на какое расстояние опускается конец нити (точка A на рис. справа), когда Рутилус тянет его вниз изо всех сил.



Решение

Выпишем условие равновесия блока:

$$T_1 = F + T_2$$
$$F = T_2$$

где T_1 – это сила упругости в верхней пружине, а T_2 – сила упругости в нижней пружине.

Таким образом, $T_1 = 2F$. Применяя закон Гука, получаем $x_1 = \frac{2F}{k}$, x_1- это высота, на которую опустился блок. Тогда высота, на которую опустится точка А в связи с опусканием блока будет $2x_1$.

С другой стороны, $x_2 = \frac{F}{k}$, x_2 – высота на которую опустилась точка А относительно блока в связи с удлинением второй пружины.

Складывая эти два изменения высоты, получаем: $x = 2x_1 + x_2 = \frac{5F}{k}$.

5. Чтобы заправить систему охлаждения своего звездолёта, Теус Тид с помощью телекинеза охлаждает $\nu=1$ *моль* воздуха от начальной температуры $T=20°C$ до жидкого состояния, отводя от него тепло со скоростью $P=100$ *Дж/с.* Воздух, в основном, состоит из 80% атомов азота (N_2) и 20% атомов кислорода (O_2). За какое время весь охлаждаемый воздух превратится в жидкость? Постройте график зависимости температуры данной смеси от времени и поясните его. Температура кипения азота $T_{N2}=-196°C$, удельная теплота парообразования азота $L_{N2}=198$ *кДж/кг*, молярная масса азота $M_{N2}=28$ *г/моль,* удельная теплоёмкость азота $c_{N2}=1,05$ *кДж/(кг·К),* удельная теплоёмкость жидкого азота $c_{жN2}=2,1$ *кДж/(кг·К)* температура кипения кислорода $T_{O2}=-183°C,$ удельная теплота парообразования кислорода $L_{O2}=213$ *кДж/кг*, молярная масса кислорода $M_{O2}=32$ *г/моль*, удельная теплоёмкость кислорода $c_{O2}=0,92$ *кДж/(кг·К),* удельная теплоёмкость.

Решение

Для начала выпишем какие массы у азота и кислорода соответственно:

$$m_{N_2} = M_{N_2} * \nu * 0.8 = 22.4г$$
$$m_{O_2} = M_{O_2} * \nu * 0.2 = 6.4г$$

Найдём закон, по которому будет меняться температура со временем, когда азот и кислород находятся в газообразных состояниях. Распишем количество теплоты, которое уходит на охлаждение данной смеси газов:

$$Q = Pt = (c_{N_2} m_{N_2} + c_{O_2} m_{O_2})\Delta T$$

Выражаем отсюда температуру:

$$T = T_0 - \frac{P}{(c_{N_2} m_{N_2} + c_{O_2} m_{O_2})} t$$

Видно, что это линейная функция от времени. Данный процесс будет происходить, пока мы не достигнем температуры конденсации одного из газов. Поскольку температура конденсации кислорода выше, то процесс охлаждения будет происходить до температуры T_{O2}.

$$t_1 = \frac{(c_{N_2} m_{N_2} + c_{O_2} m_{O_2})(\mathrm{T}_0 - T_{O_2})}{P} = \frac{(1.05*22.4 + 2.1*6.4)(20+183)}{100} = 75.03c$$

Во время конденсации кислорода температура не будет меняться. Однако мы можем найти время, когда конденсация закончится.

$$P(t_2 - t_1) = L_{O_2} m_{O_2} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{L_{O_2} m_{O_2}}{P} = 75.03 + \frac{213*6.4}{100} = 88.66c$$

Аналогично после конденсации будет охлаждение смеси из жидкого кислорода и азота.

$$T = T_{O_2} - \frac{P}{(c_{N_2} m_{N_2} + c_{жO_2} m_{O_2})}(t - t_2)$$

Данный процесс будет происходить до температуры конденсации азота. Найдём время, когда начнётся конденсации азота:

$$t_3 = t_2 + \frac{(c_{N_2} m_{N_2} + c_{жO_2} m_{O_2})(T_{O_2} - T_{N_2})}{P} = 88.66 + \frac{(1.05*22.4 + 7.4*6.4)((-183)+196)}{100} = 98.04c$$

Во время конденсации азота температура не будет меняться. Найдём время, когда конденсация закончится.

$$P(t_4 - t_3) = L_{N_2} m_{N_2} \Rightarrow t_4 = t_3 + \frac{L_{N_2} m_{N_2}}{P} = 98.04 + \frac{198*22.4}{100} = 142.39c$$