

1. По закріпленій похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом, ковзає зі сталою швидкістю V брусок масою $2m$. Згори без початкової швидкості відпускають шматок пластиліну масою m . Пролетівши відстань H , пластилін упав на брусок і прилип до нього. Яка кількість теплоти виділилась під час зіткнення? Опором повітря знехтувати.

Розв'язання

У цій системі зберігається горизонтальна складова імпульсу, оскільки в цьому напрямку зовнішні сили не діють. Тоді $2mV \cos \alpha = 3mu \cos \alpha$, де u – це швидкість бруска з пластиліном. Звідси отримуємо: $u = 2V / 3$.

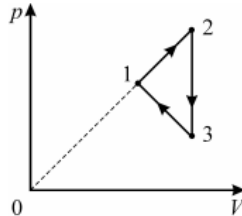
Тепер запишемо закон збереження енергії з урахуванням втрат на тепло:

$$mgH + 2m \frac{V^2}{2} = 3m \frac{1}{2} \left(\frac{2V}{3} \right)^2 + Q.$$

Звідки й отримуємо шукану кількість теплоти

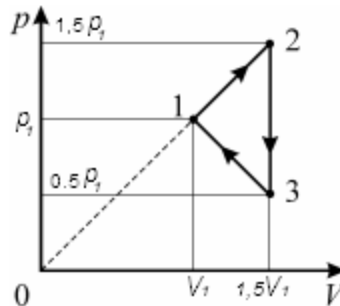
$$Q = mgH + \frac{mV^2}{3}.$$

2. Один моль ідеального одноатомного газу здійснює цикл, графік якого наведено на pV -діаграмі. Температури газу в станах 1, 2 і 3 дорівнюють $T_1 = 4T_0$, $T_2 = 9T_0$ и $T_3 = 3T_0$, відповідно. Порахувати роботу, яку виконує газ за один цикл?



Розв'язання

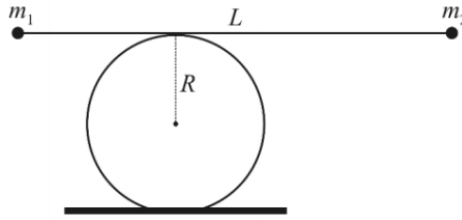
Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона для станів 1, 2 і 3. $P_1 V_1 = 4RT_0$, $P_2 V_2 = 9RT_0$ і $P_3 V_3 = 3RT_0$. Врахуємо, що стани 1 і 2 розташовано на прямій, яка проходить крізь початок координат, тобто, $P_2 / V_2 = P_1 / V_1$, а також і те, що процес 2-3 є ізохорним, $V_2 = V_3$. З п'яти здобутих співвідношень виразимо тиск і об'єм у станах 2 і 3 через відповідні параметри стану 1. Результат наведено на рисунку.



Числове значення роботи, яку виконує газ за один цикл, визначаємо як площу, яку обмежено циклом на pV -діаграмі. Площу трикутника 123 обчислимо як різницю площ трапецій:

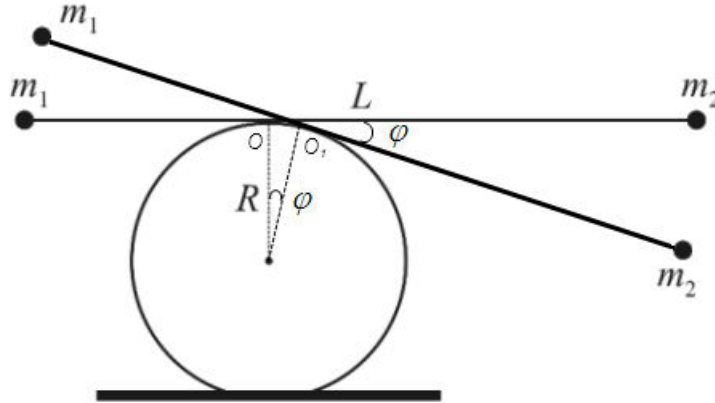
$$A = \frac{p_1 + 1,5p_1}{2} \cdot \frac{1,5V_1 - V_1}{2} - \frac{p_1 + 0,5p_1}{2} \cdot \frac{1,5V_1 - V_1}{2} = \frac{1}{4} P_1 V_1 = RT_0.$$

3. Система складається з тонкого невагомго стержня довжиною L , на кінцях якого закріплено дві маленькі кульки масами m_1 і m_2 . Стержень лежить нерухомо на поверхні шершавого горизонтального жорстко закріпленого циліндру радіусом R . У стані рівноваги стержень є горизонтальним і перпендикулярним до осі циліндра (див. рис.). Стержень повертають на малий кут у такий спосіб, що він рухається відносно циліндра без ковзання, і відпускають. Після цього починаються коливання, в процесі яких стержень качається по поверхні циліндра також без ковзання, а кульки рухається в площині рисунка. Визначити частоту коливань, що виникають? Опором повітря знехтувати.



Розв'язання

Цю задачу можна розв'язати в два способи: динамічний і енергетичний. Розглянемо перший спосіб. Визначимо спочатку довжини плечей стержня від кульок до точки опори в стані рівноваги. З рівності моментів легко визначити, що $L_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L$ і $L_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L$. Повернемо стержень на деякий малий кут φ (див. рис.).



Відстані від кульок до нової точки опори O_1 змінились порівняно зі станом рівноваги на величину $R\varphi$ і стали дорівнювати $L'_1 = L_1 + R\varphi$ і $L'_2 = L_2 - R\varphi$. Запишемо тепер основний закон динаміки обертального руху: $m_1 g L'_1 \cos \varphi - m_2 g L'_2 \cos \varphi = -(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2) \ddot{\varphi}$. Підставимо $L'_1 = L_1 + R\varphi$ і $L'_2 = L_2 - R\varphi$ та врахуємо малість кута φ (залишимо лише доданки першої степені за кутом φ). Також урахуємо, що $\cos \varphi \approx 1$.

$$m_1 g (L_1 + R\varphi) \cos \varphi - m_2 g (L_2 - R\varphi) \cos \varphi = -(m_1 (L_1 + R\varphi)^2 + m_2 (L_2 - R\varphi)^2) \ddot{\varphi},$$

$$m_1 g R\varphi - m_2 g (-R\varphi) = -(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2) \ddot{\varphi}.$$

Підставимо $L_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L$ і $L_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L$:

$$(m_1 + m_2) g R \varphi = - \left(m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} L \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} L \right)^2 \right) \ddot{\varphi} = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L^2 \ddot{\varphi}.$$

Перенесемо доданки в один бік і запишемо рівняння у вигляді $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$, де ω і є шукана частота коливань:

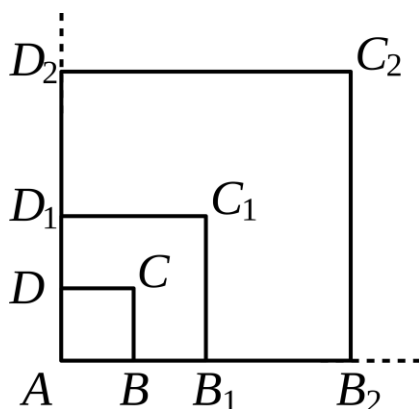
$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L^2 \ddot{\varphi} + (m_1 + m_2) g R \varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} \frac{g R}{L^2} \varphi = 0.$$

Звідси здобуваємо, що частота коливань $\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} \frac{g R}{L^2}}$.

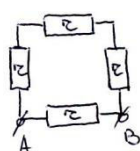
4. З дроту зібрано електричну схему (див. рис.), яка являє собою вкладені квадрати, причому сторона кожного нового квадрата вдвічі більша за попередню (тобто $AB_1 = 2AB$, $AB_2 = 4AB$, $AB_3 = 8AB$, тощо). Опір одного квадрата ABCD між точками A і B дорівнює R_0 . Визначити, чому

дорівнює опір схеми між точками А і В у випадку, коли схема складається з дуже великого числа квадратів? Дріт вважати однорідним із незмінним поперечним перерізом.



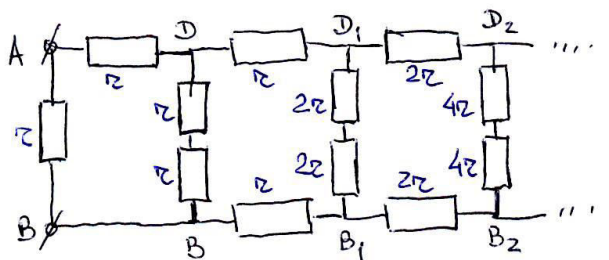
Розв'язання

Позначимо опір сторони АВ найменшого квадрата як r . Тоді в першому випадку, коли під'єднано лише один квадрат ABCD маємо:

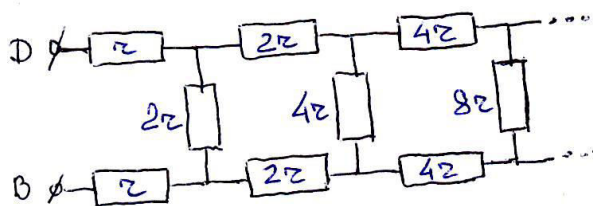


$$\left. \begin{aligned} R_{AB} &= R_0 \\ R_{AB} &= \frac{r \cdot 3r}{r + 3r} = \frac{3}{4}r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{4}r = R_0, \quad \text{або} \quad r = \frac{4}{3}R_0.$$

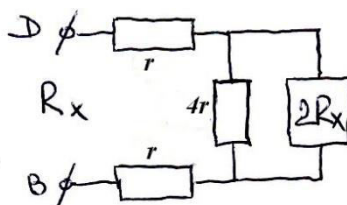
Нарисуємо тепер еквівалентну схему у випадку дуже великого числа квадратів.



З рисунка видно, що схема складається з ланки ABB₁CD, яку під'єднано до точок В і D, та «стандартної» безкінечної схеми такого вигляду:



Оскільки номінали опорів у кожній наступній ланці вдвічі більші попередніх, то відкидання першої ланки спричиняє подвоєння підсумкового опору, тобто:

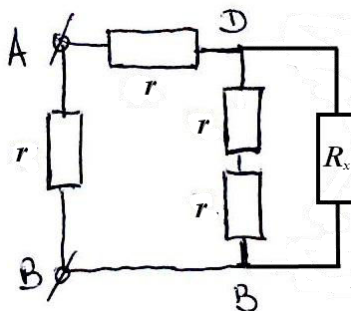


Звідси маємо рівняння: $r + \frac{2R_x \cdot 4r}{2R_x + 4r} + r = R_x$, з якого для R_x виводимо квадратне рівняння

$R_x^2 - 4rR_x - 4r^2 = 0$. З розв'язання квадратного рівняння маємо $R_x = \frac{4r \pm \sqrt{32}r}{2}$. Відкидаємо нефізичний

негативний розв'язок, і дістаємо: $R_x = 2r(1 + \sqrt{2})$.

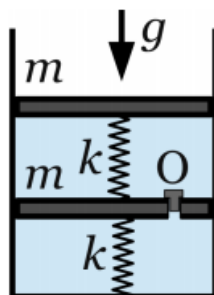
Тепер можна замінити в первісній схемі безкінечний «хвіст», під'єднаний до точок В і D, на опір R_x .



$$\text{Тоді обчислимо: } R_{AB} = \frac{r \cdot \left(r + \frac{R_x \cdot 2r}{R_x + 2r} \right)}{r + r + \frac{R_x \cdot 2r}{R_x + 2r}} = \frac{r(2r + 3R_x)}{2(2r + 2R_x)}.$$

$$\text{Підставимо } R_x \text{ і отримаємо: } R_{AB} = \frac{r(2r + 6r(1 + \sqrt{2}))}{2(2r + 4r(1 + \sqrt{2}))} = \frac{r(4 + 3\sqrt{2})}{2(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}r}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} R_0.$$

5. В посудині розташовано два поршні масою m і дві пружини жорсткістю k . Одна пружина з'єднує поршні між собою, друга – нижній поршень і дно посудини (див. рис.). Простір під поршнями є заповнено ідеальним газом, система перебуває в рівновазі, при цьому обидві пружини є недеформованими та мають довжину L . В нижньому поршні відкрили невеликий наскрізний отвір O . На якій висоті розташуються поршні, коли в системі знову встановиться рівновага? Вважати, що температура наприкінці встановлюється такою, що дорівнює первісній. Атмосферним тиском, вагою газу та тертям знехтувати. Прискорення вільного падіння g .



Розв'язання

За умовою пружини спочатку недеформовані, тому вони не діють на поршні. Це означає, що в початковий момент вагу поршнів урівноважує лише сила тиску газу. З умови рівноваги верхнього поршня отримуємо, що тиск газу під ним (у верхньому відсіку) дорівнює $p_0 = mg/S$, де S – площа поршня. На нижній поршень згори діє сила тиску газу з верхнього відсіку $p_0 S = mg$, а знизу – сила тиску газу нижнього відсіку. Оскільки різниця цих сил урівноважує вагу нижнього поршня mg , то сила тиску в нижньому відсіку дорівнює $2mg$. Тому тиск газу в нижньому відсіку спочатку дорівнює $2p_0$.

Позначимо тиск газу в обох відсіках після встановлення рівноваги як p . Припустимо, що після встановлення рівноваги верхня пружина стиснеться на x_1 , а нижня – на x_2 . Якщо насправді якась пружина не стиснеться, а навпаки розтягнеться, це відповідатиме негативному значенню x_1 або x_2 . За допомогою введених позначень нескладно виразити скінченні об'єми відсіків із газом, $V_1 = (L - x_1)S$ і $V_2 = (L - x_2)S$.

Запишемо за допомогою рівняння Менделєєва-Клайперона кількість речовини у відсіках спочатку, v_1 і v_2 , а саме, $v_1 = p_0 LS/(RT)$, $v_2 = 2p_0 LS/(RT)$. Сумарна кількість речовини $v_1 + v_2 = 3p_0 LS/(RT)$ наприкінці знаходять за тиску p в об'ємі $V_1 + V_2$, а температура T за умовою не змінилась, тому $v_1 + v_2 = p(V_1 + V_2)/RT \Rightarrow 3mg/LS = p(2L - x_1 - x_2)$.

Наприкінці, після встановлення рівноваги, сили, якої діють на кожен поршень, знову скомпенсовані. Для верхнього поршня це тепер умова $mg = pS + kx_1$. На нижній поршень наприкінці діє

рівний тиск газу p згори та знизу, тому його вага скомпенсована різницею сил натягу пружин: $mg + kx_1 = kx_2$.

Розв'яжемо здобуту систему рівнянь. Для подальшого аналізу зручно перейти до безрозмірних параметрів, увівши відносне стискання пружин $\alpha_{1,2} = x_{1,2}/L$ і параметр $a = mg/(kL)$. Система набуває вигляду

$$3a = \frac{pS}{kL}(2 - \alpha_1 - \alpha_2),$$

$$a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1,$$

$$a + \alpha_1 = \alpha_2.$$

Виключимо з системи величини $\frac{pS}{kL}$, α_2 і отримаємо квадратне рівняння на α_1 :

$$2\alpha_1^2 - (a + 2)\alpha_1 - a(a + 1) = 0.$$

Знаходимо два розв'язки для верхньої пружини: $\alpha_1 = (a + 2 \pm (3a + 2))/4$. Відзначимо, що якщо взяти «розв'язок з плюсом», матимемо $\alpha_1 = 1 + a$. Оскільки $a > 0$, а відносне стискання α_1 не може перевищувати 1 (так само, як звичайне стискання x_1 не може перевищувати довжину недеформованої пружини L), то такий розв'язок є нефізичним. Розв'язок же «з мінусом» дає цілком фізичну відповідь $\alpha_1 = -a/2$, $\alpha_2 = a/2$.

Отже, здається, що розв'язок знайдено: верхня пружина розтягується на $x_1 = La = mg/(2k)$, а нижня настільки само стискається. Однак, слід урахувати, що відносне стискання другої пружини $\alpha_2 = a/2$ також не має перевищувати 1, тому побудований розв'язок є нефізичним при $a > 2$.

У цьому випадку нижній поршень просто лежить на дні посудини, оскільки жорсткості пружин не вистачає, аби утримати його. Рівняння $mg + kx_1 = kx_2$ тепер не виконується, і замість нього слід узяти $x_2 = L$ (або $\alpha_2 = 1$). Здобудемо нову систему рівнянь:

$$3a = \frac{pS}{kL}(1 - \alpha_1), \quad a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1.$$

Розв'язуючи аналогічно, здобуваємо квадратне рівняння $\alpha_1^2 - (a + 1)\alpha_1 - 2a = 0$. Звідси здобуваємо

для $\alpha_1 = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a + 1)^2 + 8a}}{2}$. Розв'язок «з плюсом» знову слід відкинути, оскільки воно наперед більше одиниці. Верхній поршень при цьому буде перебувати над дном на відстані $L - La_1$.