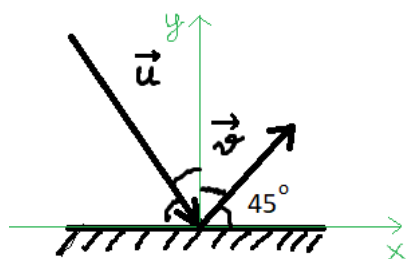


1. Ідеально гладка і важка платформа, нахилена під кутом 45° до горизонту, рухається рівномірно горизонтально зі швидкістю v . Матеріальна точка падає вертикально вниз на платформу зі швидкістю u . Знайти на скільки матеріальна точка зміститься по горизонталі після пружного зіткнення з платформою. Відстань від точки зіткнення до площини підлоги h .

Розв'язок

Посчитаем с какой скоростью будет двигаться тело после соударения с платформой. Для этого перейдем в СО связанную с платформой. Разложим скорости на нормальную и перпендикулярную составляющие. Найдем скорость до соударения:



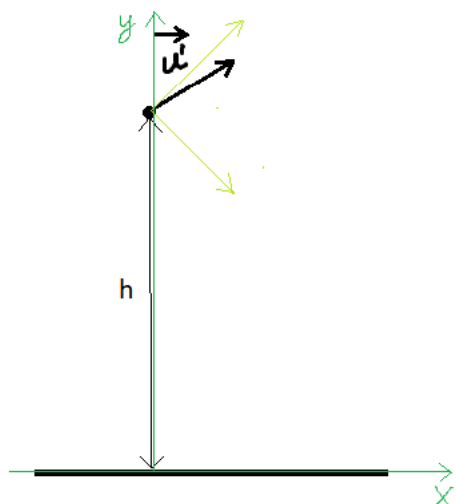
После:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u - v); \frac{\sqrt{2}}{2}(-u - v) \right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u - v); \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \right)$$

Теперь перейдем обратно в лабораторную СО: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u; \frac{\sqrt{2}}{2}(u + 2v) \right)$

Перейдем теперь в более удобную систему координат, так что оси горизонтальны и вертикальны.



$$u' = (u + v; v)$$

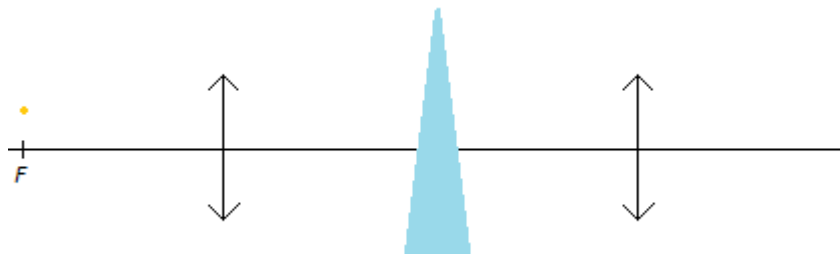
Как видим, платформа никогда не догонит шарик. Тогда можем легко рассчитать дальность полета тела.

$$\begin{cases} x = (v + u)t \\ y = h + vt - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

$$\text{Время полёта: } \tau = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2gh}}{g}.$$

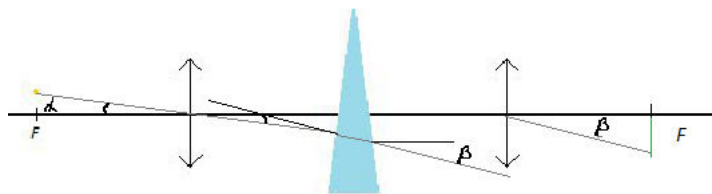
$$\text{Дальность полёта: } l = \frac{v + u}{g} (v + \sqrt{v^2 + 2gh}).$$

2. Дві збиральні лінзи з фокусною відстанню F розташовані так, що їхні оптичні осі збігаються. Відстань між лінзами $2F$. Між лінзами рівно посередині розташована скляна призма з малим кутом при вершині φ і показником заломлення n . Крпка, що світиться, знаходиться над фокусом лінзи на відстані h , як показано на малюнку. Знайти зображення точки, що світиться. Вважаємо що якщо значення α - мале, то $\sin \alpha \approx \alpha$.



Розв'язок

После преломления в первой линзе пучок лучей выйдет параллельным под углом к главной оптической оси тангенс которого равен $\frac{h}{F}$ (поскольку луч, проходя через оптический центр линзы, не преломится).

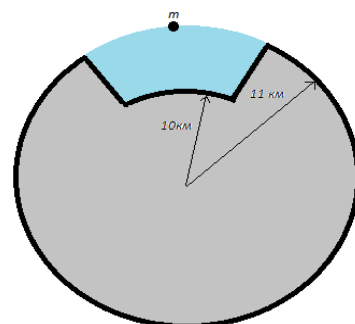


Угол падения на призму равен $\frac{\varphi}{2} - \alpha$. Считая α и φ малыми, можем заключить, что угол преломления в призме будет равен $\gamma = \frac{1}{n} \left(\frac{\varphi}{2} - \alpha \right)$ (по закону Снеллиуса). Угол падения в призме будет равен $\varphi - \gamma$. Тогда угол преломления в воздух равен $n(\varphi - \gamma) = \left(n - \frac{1}{2} \right) \varphi + \alpha$. Угол выходящего луча с горизонтом будет равен $\beta = (n - 1)\varphi + \alpha$.

Пучок лучей после преломления в призме останется параллельным, так как β не зависит от координаты. Тогда он соберётся в фокусе второй линзы.

Расстояние до главной оптической оси будет равно $F \cdot \operatorname{tg} \left((n - 1)\varphi + \operatorname{arctg} \left(\frac{h}{F} \right) \right)$. И будет снизу от главной оптической оси.

3. Яку мінімальну енергію витратить космічний апарат маси 40кг і середньої густини 500 кг/м^3 , щоб дістатися до дна озера, розташованого на астероїді кулястої форми, параметри яких дано на малюнку? Густина рідини і самого астероїда 1000 кг/м^3 . Апарат знаходиться на поверхні озера і має нульову швидкість.

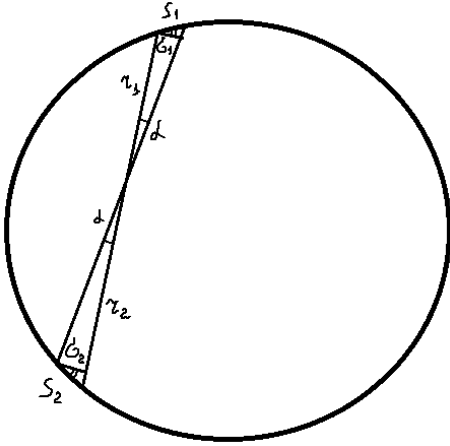


Розв'язок

На аппарат действует две силы – сила Архимеда и сила тяготения, они противоположны. Сила Архимеда в два раза больше, тогда их векторная сумма будет направлена вертикально вверх. Она равна по модулю

$$F = (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}})Vg.$$

Для того чтоб найти ускорение свободного падения нужно заметить что плотность астероида равна плотности жидкости в озере. Наружный слой сферически симметричной поверхности относительно центра астероида проходящей через точку, в которой в данный момент находится аппарат, не взаимодействует с ним. В это легко убедиться:



Проведём конус с малым углом между образующими и сечением окружность, относительно любой точки внутри сферы плотности ρ . Проведём симметричное сечение через сферу, как показано на рисунке.

Введём обозначения как показано на рисунке. σ_1 и σ_2 – площади перпендикулярные конусу. Углы между S_1 и σ_1 и между S_2 и σ_2 одинаковы. Тогда $S_1 = A\sigma_1, S_2 = A\sigma_2$

$$S_1 = A\sigma_1 = \tilde{A}r_1^2\alpha.$$

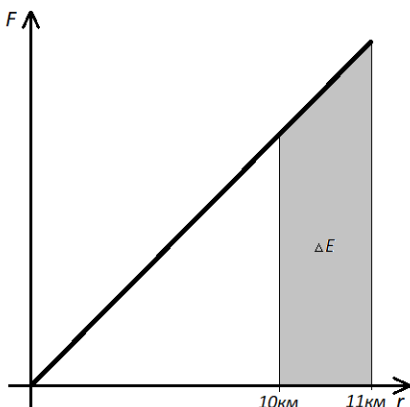
Поле которое создаёт площадь S_1 равно $E_1 = G \frac{\rho \tilde{A}r_1^2\alpha}{r_1^2} = G\rho\tilde{A}\alpha$. E_2 равно тому же, тогда поле этих площадей в вершине будет нулевым. Если разбить всю сферу на такие конусы тогда поле относительно всей сферы будет нулевым.

Что и требовалось доказать. Тогда $g(r) = G \frac{\rho_{\text{ж}} \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_{\text{ж}} r$.

$$F = \frac{4}{3}\pi G\rho_{\text{ж}}(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}) \frac{m}{\rho_{\text{т}}} r.$$

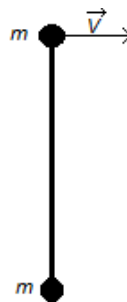
График $F(r)$, на котором нарисована искомая энергия.

Пусть $r_1 = 10\text{км}$, $r_2 = 11\text{км}$



$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}(F(r_2) + F(r_1))(r_2 - r_1) = \\ &= \frac{2}{3}\pi G\rho_{\text{ж}}(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}) \frac{m}{\rho_{\text{т}}}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = \\ &= \frac{2}{3}\pi G \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}}(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}})m(r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

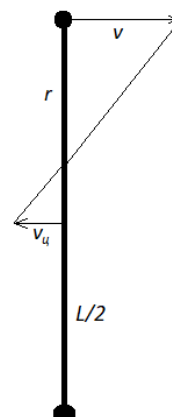
4. Дві однакові матеріальні точки масою m , з'єднані невагомим і нерозтяжним стрижнем довжини l , лежать на гладкій горизонтальній площині. У якийсь момент швидкість однієї з них була спрямована перпендикулярно до стрижня і мала величину v , при цьому конструкція мала кутову швидкість ω . На скільки зміститься центр мас системи, коли тіло вчинило 5 повних оборотів.



Розв'язок

На систему не действуют внешние силы, значит центр масс будет иметь нулевое ускорение и угловая скорость будет постоянна.

Найдём моментальный центр вращения в начальный момент. Поскольку скорость в верхней точки перпендикулярна стержню, тогда моментальный центр ускорения будет находиться на прямой содержащей стержень. Расстояние от верхней точки до центра вращения $r = \frac{v}{\omega}$. Тогда скорость центра масс - $v_{\text{ц}} = \left| \frac{l}{2} \pm r \right| \omega = \left| \frac{l}{2} \pm \frac{v}{\omega} \right| \omega = \left| \frac{1}{2} l \omega \pm v \right|$. Время за которое тело совершило 5 полных оборотов равно: $t = \frac{10\pi}{\omega}$. Тогда центр масс сместится на расстояние

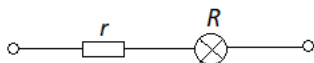


$$\frac{10\pi}{\omega} \left| \frac{1}{2} l \omega \pm v \right|$$

5. Коли горіла лампочка потужністю 12 Вт, на проводах з'єднання виділялася потужність 2 мВт. Скільки потужності буде виділятися на проводах, якщо вищеописану лампочку викрутити і вкрутити лампочку потужністю 7Вт? Напруга на лампочці дорівнює напрузі в мережі.

Розв'язок

Пусть сопротивление проводов соединения r , сопротивление лампочки R , напряжение в сети U .



По условию $r \ll R$, тогда падением напряжения на проводах соединения можно пренебречь по сравнению с падением напряжения на лампочке.

Ток в цепи равен $I = \frac{U}{R}$. Мощность на лампочке и на проводах соединения:

$$P_R = \frac{U^2}{R}, \quad P_r = I^2 r = \frac{U^2}{R^2} r = \frac{r}{U^2} P_R^2 \sim P_R^2.$$

Тогда мощность на лампочке будет равно $2 \frac{7^2}{12^2} \text{ мВт} = 0.68 \text{ Вт}$.