9 класс

1. На непроводящую гладкую спицу, установленную вертикально на столе, нанизаны два одноимённо заряженных шарика. Зарядов шариков равны q_1 и q_2, а их массы m_1 и m_2 соответственно. Определите расстояние между шариками в состоянии равновесия.

Решение

В данном случае на верхний шарик действуют лишь сила тяготения и сила Кулона. Поскольку он находится в рановесии, то

$$mg = \frac{kq_1q_2}{r^2},$$

где r– расстояние между шариками. Индекс у массы опущен, ведь необходимо рассмотреть два случая для каждого из шариков. Выражая отсюда r, получаем для первого шарика

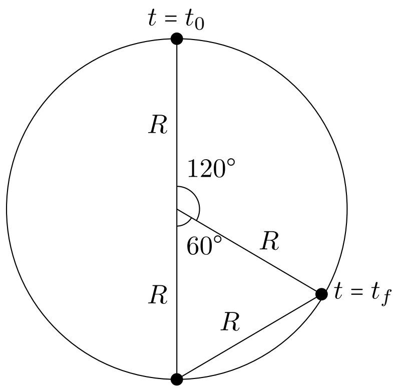
$$r_1 = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{m_1g}},$$

а для второго шарика

$$r_2 = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{m_2g}}.$$

2. Два велосипедиста ездят по кругу в одном направлении с разными, но постоянными скоростями, стартовав одновременно из одной точки. Расстояние между ними увеличивалось и достигло максимального значения за 30 минут. Затем расстояние начало уменьшаться. Спустя какое время расстояние между ними уменьшиться вдвое?

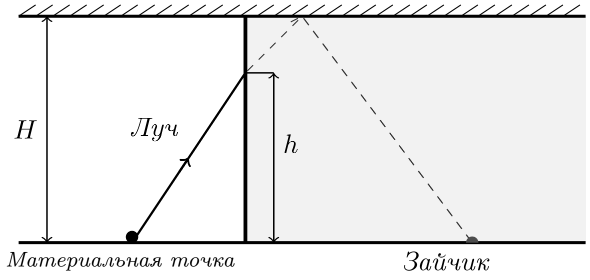
Решение



Для удобства перейдём в систему отсчёта, где один из велосипедистов покоится. Обозначим время, когда они были на максимальном расстоянии, как $t_0 = 30$ мин, а время, когда они были на расстоянии, равном половине максимального значения, как t_f. Тогда задача упрощается к рассмотрению расстояния от движущей точки на окружности (второго велосипедиста) до некоторой фиксированной точки (первого велосипедиста). Понятно, что в такой постановке наибольшее расстояние между двумя велосипедистами – это диаметр окружности $2R$. Следовательно, когда это значение уменьшилось в два раза расстояние между ними стало равным радиусу R. В этот момент угол между ними составляет 60°, а угол между положением в момент времени $t = t_f$ и положением в момент времени $t = t_0$ равен 120°. Если за $t = t_0$ второй велосипедист относительно первого прошёл пол окружности, тогда 120° он пройдёт за $t = t_0 \cdot \frac{120}{180} = \frac{2}{3}t_0 = 20$ мин, поскольку их скорости движения постоянны. Значит с момента старта прошло $t = \frac{5}{3}t_0 = 50$ мин.

3. Узкий коридор высоты H с зеркалом по всему потолку, состоит из двух частей с показателями преломления n_1 и $n_2 = \sqrt{2}n_1$ соответственно. Материальная точка движется вдоль коридора в первой среде, перпендикулярно к границе раздела. При движения, она светит лазером всё время в фиксированную точку, находящуюся на границе раздела на высоте $h < H$. Найдите минимальное расстояние, на которое приблизятся материальная точка и зайчик (точка, куда падает луч лазера на пол по другую сторону от границы). Материальная точка не может перейти из одной среды в другую.

Решение



При прохождении через границу раздела луч света преломляется, после отражается от поверхности зеркала и падает на пол. На границе раздела сред выполняется закон Снелла:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta,$$

где α – угол между нормалью и падающим лучом, а β – угол между нормалью и преломлённым лучом. Преломлённый луч направлен под углом β к горизонту и проходит высоту $H-h$, следовательно его горизонтальное смещение $x_1 = (H-h)\operatorname{ctg}\beta$. Аналогичным образом для луча отражённого от зеркала можно получить его горизонтальное смещение $x_2 = H\operatorname{ctg}\beta$, поскольку угол падения равен углу отражения. Значит расстояние от зайчика до границы раздела равно

$$x = x_1 + x_2 = (2H-h)\operatorname{ctg}\beta.$$

С другой стороны, расстояние от материальной точки до границы раздела

$$y = h\operatorname{ctg}\alpha.$$

Суммируя эти два выражения, получаем следующую формулу для расстояния между материальной точкой и зайчиком:

$$l = y + x = h\operatorname{ctg}\alpha + (2H-h)\operatorname{ctg}\beta.$$

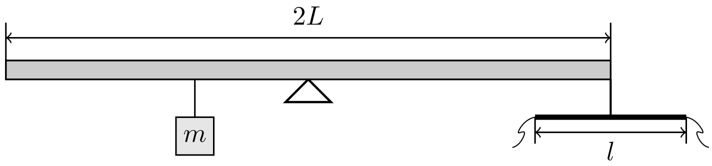
Видно, что расстояние тем меньше чем больше угол α, поскольку из закона Снелла при увеличении α, угол β также растёт. Значит минимальное расстояние между материальной точкой и зайчиком будет достигаться в случае, когда $\alpha = 90°$. При этом

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 45°$$

В итоге минимальное расстояние $l = (2H-h)$.

4. На правом краю равноплечих весов, общей длины $2L$, на жестком непроводящем стержне закреплён проводник длины l, параллельно плечам весов. Чтобы уравновесить систему, необходимо на левое плечо повесить груз массы m на расстоянии $L/6$ от центра . В какой точке весов нужно подвесить груз, если по проводнику пустить ток I, а магнитное поле B направить перпендикулярно плоскости рисунка? Какие значения может принимать индукция магнитного поля B, чтобы равновесное положение существовало?

Решение



При отсутствии магнитного поля можно определить массу проводника на стержне M

$$mg\frac{L}{6} = MgL \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{m}{6}.$$

Без ограничения общности предположим, что ток течёт по проводнику слева-направо, а положительное направление оси магнитного поля – от нас, перпендикулярно плоскости рисунка. В таком случае, $B > 0$ соответствует силе Ампера, противонаправленной силе притяжения, а $B < 0$ – наоборот. Тогда условия равновесия имеет вид

$$mgx = MgL - F_a L = (Mg - BIl)L, \tag{1}$$

где x – это положение груза от центра весов. Если $x > 0$ – то груз размещён на левом плече, в противном случае – на правом. Используя связь между массами, находим положение груза на весах:

$$mgx = \left(\frac{mg}{6} - BIl\right)L \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{mg - 6BIl}{6mg}L.$$

Поскольку длина каждого плеча равна L, то $-L \le x \le L$. Отсюда можно определить диапазон, в котором меняется магнитное поле. Для нижней границы, $x = -L$,

$$mgL = \frac{mg}{6}L - B_{cr1}IlL \qquad \Rightarrow \qquad B_{cr1} = -\frac{5}{6}\frac{mg}{Il}.$$

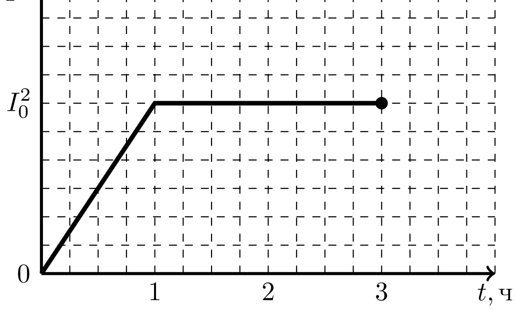
Для верхней границы, $x = L$,

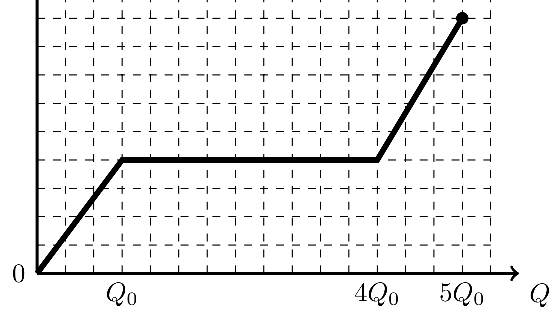
$$-mgL = \left(\frac{mg}{6} - B_{cr2}Il\right)L \qquad \Rightarrow \qquad B_{cr2} = \frac{7}{6}\frac{mg}{Il}.$$

Таким образом, магнитное поле меняется в промежутке $[-\frac{5}{6}\frac{mg}{Il}; \frac{7}{6}\frac{mg}{Il}]$.

5. Некоторое вещество расплавили с помощью электропечи, нагревательный элемент которой представляет собой проводящую спираль. Дан график зависимости квадрата силы тока I в нагревательной спирали от времени t и соответствующий ему график зависимости температуры T данного вещества от теплоты Q, полученной от нагревателя. Найдите время плавления вещества.

Решение





Если принять за Q_0 количество теплоты необходимое для нагрева вещества до температуры плавления, то из зависимость температуры от теплоты за весь процесс было передано количество теплоты $5Q_0$. Процесс плавления происходит без изменения температуры, следовательно он начался в момент, когда количество выделенной теплоты равнялось Q_0, и закончился, когда выделилось $4Q_0$

теплоты. Поскольку количество теплоты является площадью под графиком мощности P от времени t, можно определить время, когда процесс плавления начался и когда закончился. Продолжительность этого промежутка как раз и нужно найти.

В данной задаче нагревательным элементом является спираль, которая по смыслу является резистором, выделяемая мощность которого

$$P \propto I^2.$$

Следовательно, площадь под графиком I^2 от t пропорциональна количеству выделенной теплоты. За первый час времени зависимость I^2 линейна от времени, а значит количество выделенной теплоты

$$Q_1 = \frac{I_0^2}{2} R,$$

где I_0 – это значение силы тока при $t = 1$ час, а R – сопротивление спирали. За остальные 2 часа выделилось

$$Q_2 = 2 I_0^2 R.$$

Тогда за всё время процесса выделилось теплоты

$$5Q_0 = Q_1 + Q_2 = \frac{5}{2} I_0^2 R \qquad \Rightarrow \qquad Q_0 = \frac{1}{2} I_0^2 R = Q_1.$$

Из данного соотношения видно, что за первый час времени количества теплоты хватило только до нагрева вещества до температуры плавления. Таким образом, плавление вещества приходится на промежуток времени, когда мощность стала постоянной. Из графика температуры T от переданной теплоты Q определяем, что для плавления было передано теплоты

$$3Q_0 = \frac{3}{2} I_0^2 R = t \cdot I_0^2 R,$$

что соответствует времени $t = \frac{3}{2}$ часа.