III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики
Київ, 2016 рік

Зміст

8 клас

1. *Хлопчик зі швидкістю 4 км/год йшов уздовж залізничного полотна і побачив цікаве явище. Дві електрички, які рухались назустріч одна одній зустрілися і роз'їхалися навпроти нього. Він встиг порахувати, що перша електричка мала 9 вагонів, друга – 10. Йому стало цікаво, а чи можна визначити швидкість електричок, якщо вважати, що вони були однакові за модулем? Що б ви запропонували хлопчикові?*

Перший спосіб. Найбільш короткий розв’язок виходить, якщо перейти в систему відліку, пов'язану з хлопчиком. У цьому випадку швидкість першої електрички $u_1 = v - u$, а швидкість іншої становить $u_2 = v + u$. Нехай l – довжина вагона, тоді довжина першої електрички $L_1 = n_1 \cdot l$, а другої $L_2 = n_2 \cdot l$. Обидві електрички пройдуть повз хлопчика за один й той самий час

$$t = \frac{n_1 l}{\vartheta - u} = \frac{n_2 l}{\vartheta + u} \quad (1).$$

З рівняння (1) випливає, що

$$\vartheta = \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} u = 76 \text{ км/год.}$$

Другий спосіб. В системі відліку, пов'язаної із залізничним полотном за час t перша електричка пройде шлях $L_1 = n_1 l + ut$, а друга – шлях $L_2 = n_2 l - ut$. Оскільки швидкості електричок рівні, то і $L_1 = L_2$. З цієї рівності знаходимо $l = 2ut\ (n_2 - n_1)$. Швидкість електричок $v = L\ /\ t = (2n_1+1)\ u$ = 76 км/год.

2. *Який максимальний об'єм води густиною ρ_1 = 1,0 г/см^3 можна налити в H-подібну несиметричну трубку з відкритими верхніми кінцями, яка частково заповнена маслом густиною ρ_2 = 0,8 г/см^3? Площа горизонтального перерізу вертикальних частин трубки дорівнює S. Обсягом горизонтальної частини трубки можна знехтувати. Вертикальні розміри трубки і висота стовпа масла наведені на рисунку 1 (висоту h вважати заданою).*

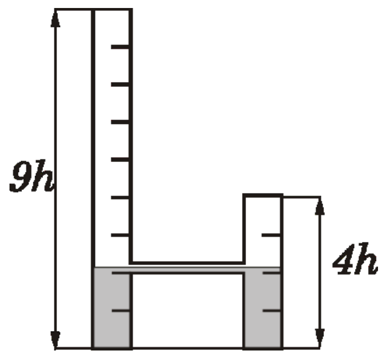


Рис. 1

Примітка. Затикати відкриті кінці трубки, нахиляти її або виливати з неї масло заборонено.

Розв’язок. Важливо, щоб у короткому коліні залишилося якомога менше масла. Тоді у високій трубці можна буде створити стовп максимальної висоти, який перевищує $4h$. Для цього почнемо наливати воду в праве коліно. Так триватиме до того часу, поки рівень води не досягне висоти $2h$ в правому коліні, а рівень масла, відповідно, – $3h$ в лівому. Подальше виштовхування масла неможливо, оскільки межа розділу масло-вода в правому коліні стане вищою за рівень сполучної трубки, і в ліве коліно почне надходити вода. Процес додавання води доведеться припинити, коли верхня межа масла в правому коліні досягне верху коліна.

Умова рівності тисків на рівні сполучної трубки дає:

$$(2h + x) \cdot 0{,}8\rho_1 = \rho_1 h + 0{,}8\rho_1 h,$$

звідки $x = 0{,}25h$. Остаточно, води вдалося налити $4{,}25h$

3. *Петрик склеїв чотири цеглини (маса кожної m = 3,24 кг) водостійким клеєм. В результаті у нього вийшов цегляний колодязь, який він приклеїв до дна акваріума прямокутної форми з площею дна S_0 = 540 см². Після цього він почав наливати воду зі шланга, який розташований між стінкою посудини та цегляним колодязем (рис. 1). Обсяг води (ϑ, л/с), який надходив зі шланга щосекунди був незмінний. Петрик дослідив залежність рівня води в посудині h від часу (рис. 2). Час $t = 0$ відповідає початку надходження води в акваріум. За результатами дослідження хлопчик визначив довжину A, ширину B й товщину C кожної цеглини, а також густину матеріалу, з якого вони зроблені. Які значення цих величин він отримав? Масою клею знехтувати.*

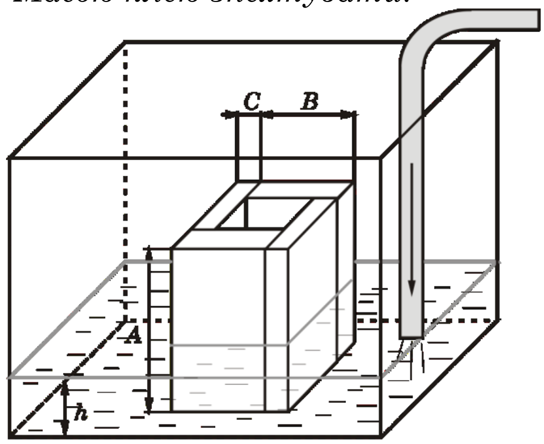


Рис. 1

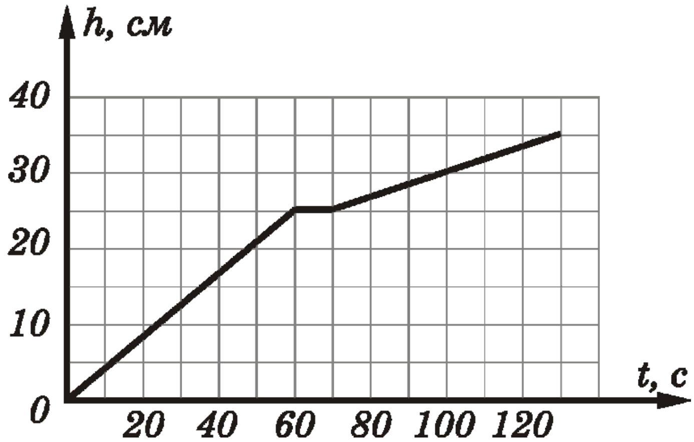


Рис. 2

Розв'язок. Проаналізуємо графік, який отримав Петрику (рис. 1). Ділянка від *0* до *60 с* відповідає заповненню водою простору між стінками акваріума та цеглинами. Об'єм, який заповнюється водою визначається за формулою: $V = (S_0 - S_1)\, h$, де $S_1 = (B + C)^2$. Протягом наступних *10 с* рівень води в посудині не змінюється. Це означає, що вода заповнює лише внутрішній об'єм цегляного колодязя. Площа внутрішньої частини становить $S_2 = (B - C)^2$. Починаючи з *70-ї* секунди рівень води знову перевищує висоту *А* цеглин. З графіка випливає, що довжина цеглини *A = 25 см*. З цього моменту заповнення акваріума відбувається повільніше, ніж на першій ділянці, оскільки площа, яка заповнюється стала більшою і дорівнює площі дна акваріума. Ділянка графіка від *70-ї* до *130-ї* секунди дозволяє визначити швидкість надходження води υ в літрах за секунду. Оскільки за Δt_3 = 60 с в посудину надійшов об'єм $\Delta h S_0$, де Δh = 10 см (див. рис. 2), то

$$\vartheta = \frac{\Delta h\, S_0}{\Delta t_3} = \frac{10\ \text{см} \times 540\ \text{см}^2}{60\ \text{с}} = 90\ \frac{\text{см}^3}{\text{с}} = 0{,}09\ \frac{\text{л}}{\text{с}}.$$

За першою частиною графіка (до *60-ї* секунди) можна визначити зовнішню площу цегляного колодязя. Оскільки за Δt_1 = 60 с рівень води досяг значення h_0 = 25 см, то об'єм води, яка надійшла з одного боку дорівнює добутку цієї висоти на різницю площ S_0 та S_1, з іншого боку цей об'єм дорівнює добутку швидкості надходження води на час її надходження. Таким чином отримуємо рівняння:

$h_0\,(S_0 - (B+C)^2) = \upsilon\,\Delta t_1$ або $S_1 = (B + C)^2 = \frac{S_0 - \upsilon\,\Delta t_1}{h_0} = \frac{540-(90\times 60)}{25} = 324$ *см²*. (1)

Заповнення внутрішньої частини колодязя тривало $\Delta t_2 = 10$ *с*. Отже,

$$h_0\,(B - C)^2 = \upsilon\,\Delta t_2 \text{ або } (B - C)^2 = (\upsilon\,\Delta t_2)/h_0 = 36 \text{ см}^2 \quad (2)$$

З (1) і (2) знаходимо $B = 12$ *см*, $C = 6$ *см*. Таким чином об'єм однієї цеглини дорівнює $V = ABC = 6\times 12\times 25 = 1800$ *см³* $= 0{,}0018$ *м³* а густина $\rho = \frac{M_k}{V} = 1800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

4. *У скелі, що примикає до моря, є печера. Вхід до печери затоплений (рис. 3). Глибина моря біля входу в печеру 5 метрів, а рівень води в печері на 1 метр нижче. Визначте тиск повітря в печері. Атмосферний тиск 100000 Па.*

За законом сполучених посудин тиск у дна всередині печери і зовні повинний бути однаковий, а оскільки всередині печери висота стовпа води на 1 м менша, ніж зовні, то тиск повітря всередині неї має бути більший ніж зовнішній на $\rho g\Delta h = 10000$ *Па*, отже, тиск усередині печери дорівнює *110000 Па*.

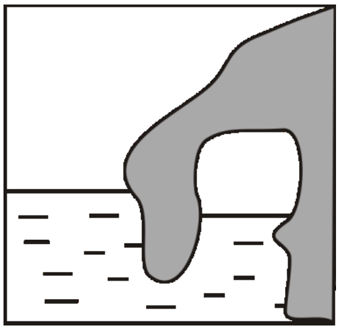


Рис. 3

5. *Невагомий блок E підвішений до лівого кінця однорідного важеля ABC масою M (рис. 4). Плече AB удвічі менше за BC. Довгий неоднорідний вантаж F масою m одним кінцем з'єднаний з кінцем важеля C, а другим – через блок E з вантажем D. Якою має бути маса вантажу D, щоб система знаходилась у рівновазі?*

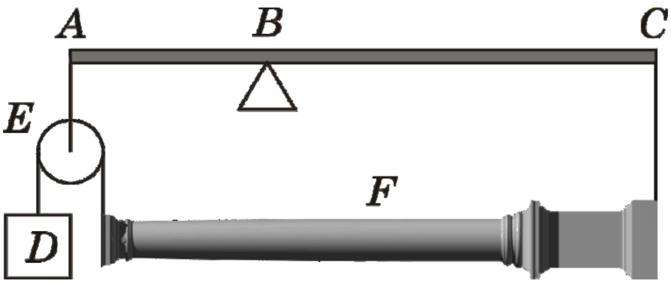


Рис. 4

Нехай m_1 – невідома маса, T_1 – сила натягу нитки, яка перекинута через блок, T_2 – сила натягу нитки, яка прикріплена до правого кінця важеля, T– сила натягу нитки, яка прикріплена до лівого кінця важеля, a – довжина лівого плеча, b – правого. Оскільки вантажі нерухомі, то сила тяжіння, яка діє на них, компенсується силами натягу ниток, що приєднані до них. Тому $mg = T_1 + T_2$, $m_1 g = T_1$. Блок невагомий та нерухомий, тому $T = 2\,T_1$. Оскільки важіль однорідний, а відношення плечей – $1/2$, то ліве плече має масу $M/3$, праве – $2M/3$. З умови рівноваги важеля:

$$\frac{Mg}{3}\cdot\frac{a}{2} + T\cdot a = \frac{2Mg}{3}\cdot\frac{b}{2} + T_2\cdot b$$

Оскільки $b/a = 2$, то: $T - 2T_2 = Mg/2$. Розв'язуючи систему рівнянь знаходимо: $m_1 = M/8 + m/2$.

9 клас

1. *Петрик склеїв чотири цеглини (маса кожної $m = 3{,}24$ кг) водостійким клеєм. В результаті у нього вийшов цегляний колодязь, який він приклеїв до дна акваріума прямокутної форми з площею дна $S_0 = 540$ см². Після цього він почав наливати воду зі шланга, який розташований між стінкою посудини та цегляним колодязем (рис. 1). Обсяг води (ϑ, л/с), який надходив зі шланга щосекунди був незмінний. Петрику дослідив залежність рівня води в посудині h від часу (рис. 2). Час $t = 0$ відповідає початку надходження води в акваріум. За результатами дослідження хлопчик визначив довжину A, ширину B й товщину C кожної цеглини,*

а також густину матеріалу, з якого вони зроблені. Які значення цих величин він отримав? Масою клею знехтувати.

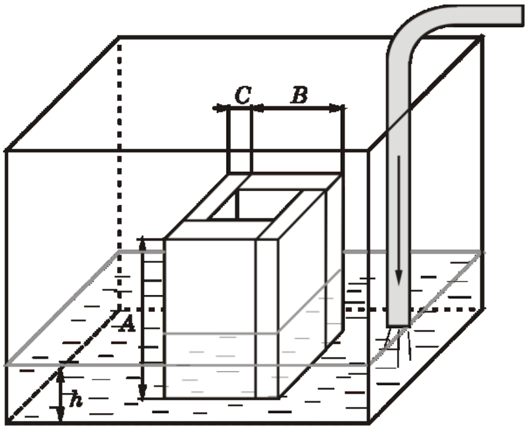


Рис. 1

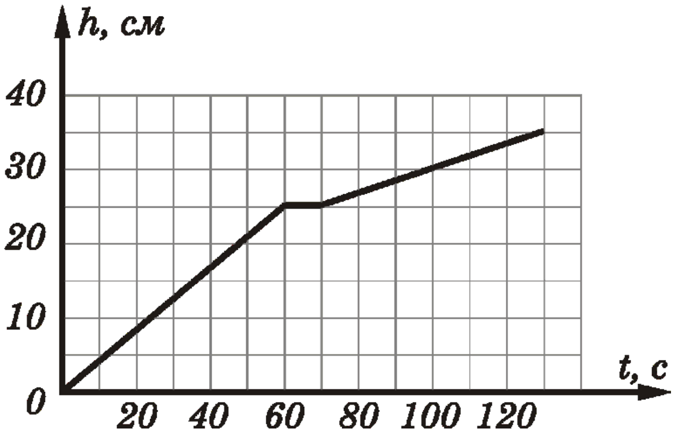


Рис. 2

Розв'язок. Проаналізуємо графік, який отримав Петрик (рис. 1). Ділянка від *0* до *60 с* відповідає заповненню водою простору між стінками акваріума та цеглинами. Об'єм, який заповнюється водою визначається за формулою:

$$V = (S_0 - S_1)\, h, \text{ де } S_1 = (B + C)^2.$$

Протягом наступних *10 с* рівень води в посудині не змінюється. Це означає, що вода заповнює лише внутрішній об'єм цегляного колодязя. Площа внутрішньої частини становить $S_2 = (B - C)^2$. Починаючи з *70-ї* секунди рівень води знову перевищує висоту *A* цеглин. З графіка випливає, що довжина цеглини $A = 25$ *см*. З цього моменту заповнення акваріума відбувається повільніше, ніж на першій ділянці, оскільки площа, яка заповнюється стала більшою і дорівнює площі дна акваріума. Ділянка графіка від *70-ї* до *130-ї* секунди дозволяє визначити швидкість надходження води υ в літрах за секунду. Оскільки за $\Delta t_3 = 60$ *с* в посудину надійшов об'єм $\Delta h S_0$, де $\Delta h = 10$ *см* (див. рис. 2), то

$$\vartheta = \frac{\Delta h\, S_0}{\Delta t_3} = \frac{10\text{ см } \times 540\text{ см}^2}{60\text{ с}} = 90\ \frac{\text{см}^3}{\text{с}} = 0{,}09\ \frac{\text{л}}{\text{с}}.$$

За першою частиною графіка (до *60-ї* секунди) можна визначити зовнішню площу цегляного колодязя. Оскільки за $\Delta t_1 = 60$ *с* рівень води досяг значення $h_0 = 25$ *см*, то об'єм води, яка надійшла з одного боку дорівнює добутку цієї висоти на різницю площ S_0 та S_1, з іншого боку цей об'єм дорівнює добутку швидкості надходження води на час її надходження. Таким чином отримуємо рівняння:

$$h_0\,(S_0 - (B+C)^2) = \upsilon\, \Delta t_1 \text{ або}$$

$$S_1 = (B + C)^2 = \frac{S_0 - \upsilon\,\Delta t_1}{h_0} = \frac{540-(90\times 60)}{25} = 324\text{ см}^2. \qquad (1)$$

Заповнення внутрішньої частини колодязя тривало $\Delta t_2 = 10$ *с*. Отже,

$$h_0\,(B - C)^2 = \upsilon\, \Delta t_2 \text{ або}$$

$$(B - C)^2 = (\upsilon\, \Delta t_2)/h_0 = 36\text{ см}^2 \quad (2)$$

З (1) і (2) знаходимо *B = 12 см*, *C = 6 см*. Таким чином об'єм однієї цеглини дорівнює $V = ABC = 6 \times 12 \times 25 = 1800$ *см³* $= 0{,}0018$ *м³* а густина $\rho = \frac{M_k}{V} = 1800\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

2. *Інколи у фільмах можна бачити цікавий ефект – під час руху карети або автівки колеса обертаються в протилежний бік їх руху. Хлопчик вирішив дослідити це явище і засняв обертання колеса з періодом $T_0 = 14$ мс за допомогою кінокамери, яка робить 24 кадри щосекунди (n). Колесо мало дефект, який дозволяв досліджувати обертання колеса. Під час перегляду він визначив час t великої кількості N обертів та знайшов період обертання за формулою $T = t/n$. Яке значення періоду він отримав таким чином?*

Розв'язок. Кадри будуть зображати положення системи з інтервалом часу $\tau_0 = \frac{1}{n} = 41{,}6$ мс. $\tau_0 \approx 3T_0$, більш точно $\tau = \tau_0 - 3T_0 = -0{,}3$ мс. Отже, під час переходу від кадру до кадра колесо робить майже 3 оберти але не доходить до положення на попередньому кадрі на частину оберту: $x = \frac{|\tau|}{T_0} = 0{,}0238$.

Під час перегляду кадрів буде здаватися, що колесо обертається в зворотній бік, оскільки $x \ll 1$, а око сприймає окремі кадри як рух предмету вздовж найкоротшого шляху, який з'єднує положення, що зафіксовані на кадрах. Таким чином колесо зробить один повний оберт, як здається в зворотній бік за $T = \frac{\tau_0}{x} = 1{,}75$ с. Саме це значення і мав отримати хлопчик.

3. *Під час лабораторної роботи учень з'єднав послідовно три резистори та під'єднав їх до джерела постійної напруги (рис. 3). Після цього він виміряв напругу на різних ділянках цього кола за допомогою вольтметра. Ввімкнений паралельно до усіх трьох резисторів вольтметр показав 3 В, а ввімкнений паралельно до одного резистора (рис. 3) – 0,8 В. Які будуть покази вольтметра, якщо його під'єднати паралельно до двох резисторів?*

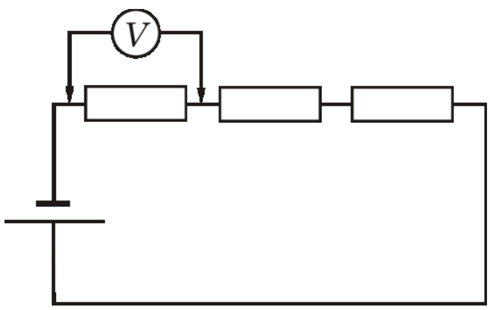


Рис. 3

Розв'язок. Зрозуміло, що $U_0 = 3$ *В* – напруга на джерелі. Нехай R – опір резистора, R_V – опір вольтметра. Тоді під час ввімкнення вольтметра до одного резистора загальний опір кола $2R + \frac{RR_V}{R+R_V} = \frac{2R^2+3RR_V}{R+R_V}$, і покази вольтметра визначаються як $U_1 = U_0 \frac{1}{2\frac{R}{R_V}+3}$, звідки знаходимо $\frac{R}{R_V} = \frac{3}{8}$. Тоді під час ввімкнення вольтметра паралельно двом резисторам він покаже $U_2 = U_0 \frac{2}{2\frac{R}{R_V}+3} = 1{,}6$ В.

4. *У скелі, що примикає до моря, мається печера. Вхід до печери затоплений (див. рис. 4). Глибина моря біля входу в печеру 5 метрів, а рівень води в печері на 1 метр нижче. Визначте тиск повітря в печері. Атмосферний тиск 100000 Па.*

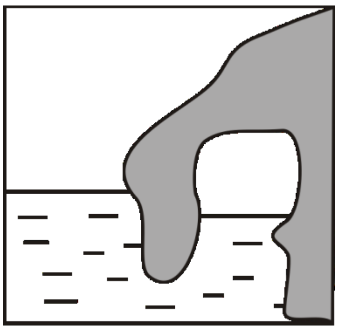


Рис. 4

За законом сполучених посудин тиск у дна всередині печери і зовні повинний бути однаковий, а оскільки всередині печери висота стовпа води на 1 м менша, ніж зовні, то тиск повітря всередині неї має бути більший ніж зовнішній на $\rho g \Delta h = 10000$ *Па*, отже, тиск усередині печери дорівнює 110000 Па (110 кПа).

10 клас

1. *Майстер Джапетто виготовив для Пінноккіо ковпак з тонкої бляхи. Ковпак має форму конуса, його висота $H = 20$ см, кут при вершині $\alpha = 60^0$. Чи буде цей ковпак утримуватись на голові у Пінноккіо, якщо ця голова – гладенька куля діаметром $D = 15$ см?*

Для розв'язку задачі необхідно, по–перше, визначити розташування центру мас ковпака. З цією метою подумки розіб'ємо ковпак на вузькі кільця однакової ширини. Маса кілець наростатиме лінійно вниз від вершини до основи ковпака. Так само, якщо розрізати рівнобедрений трикутник паралельно до його основи на смужки однакової ширини, маса смужок наростатиме лінійно. Відомо, що центр мас трикутника знаходиться у точці перетину його медіан. Тому центр мас ковпака знаходиться на його осі на відстані $\frac{2H}{3}$ від вершини.

Стан рівноваги системи буде стійким, якщо при малому відхиленні від рівноваги центр мас піднімається. У нашому випадку, для того, щоб ковпак був у стійкій рівновазі на голові Пінноккіо, необхідно, щоб його центр мас знаходився нижче за центр голови. З геометричної побудови легко побачити, що остання умова виконується, якщо $\frac{2H}{3} > D$. За умовою задачі остання нерівність не виконується, отже ковпак не триматиметься на голові Пінноккіо.

2. *В калориметр з гарячим чаєм кинули шматок льоду, який має температуру 0^0C. Після встановлення теплової рівноваги температура чаю впала на $\Delta t_1 = 12^0$ C. Коли в калориметр кинули другий такий самий шматок льоду, температура впала ще на $\Delta t_1 = 10^0$ C. На скільки зменшиться температура чаю, якщо в нього кинути такий самий третій шматок льоду? Теплоємністю калориметра, теплообміном з оточуючим середовищем та домішками заварки в чаї знехтувати.*

Розв'язок. Запишемо рівняння теплового балансу для першого випадку:

$$c\,M\,\Delta t_1 = m\,\lambda + c\,m\,(t_1 - \Delta t_1),$$

де M – маса чаю, m – маса шматка льоду, λ – питома теплота плавлення льоду, *c* – питома теплоємність води, t_1 – початкова температура чаю. Звідси

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \frac{\lambda}{c} + t_1. \quad (1)$$

У випадку з другим шматком льоду можна записати рівняння, яке є аналогічним рівнянню (1):

$$\left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \frac{\lambda}{c} + t_1. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) отримаємо:

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2),$$

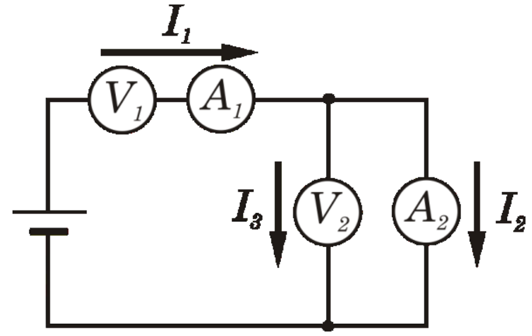
звідки легко знайти відношення мас: $\dfrac{M}{m} = \dfrac{2\,\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 10.$

У випадку третього шматка льоду отримаємо:

$$\frac{M}{3m} + 1 \quad (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) = \frac{\lambda}{c} + t_1. \quad (3)$$

З рівнянь (1) і (3), знайдемо:

$$\Delta t_3 = \frac{2}{1 + \frac{3m}{M}}\,\Delta t_1 - \Delta t_2 \approx 8{,}5^0\ \text{C}.$$



3. *Схему складено із джерела напруги, двох однакових вольтметрів та двох однакових амперметрів. Амперметри A_1 та A_2 показують відповідно $I_1 = 1{,}1$ мА та $I_2 = 1{,}05$ мА. Вольтметр V_2 показує $U_2 = 0{,}05$ В. Що показує вольтметр V_1? Чому дорівнює напруга джерела?*

Через вольтметр V_2 протікає струм $I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}05$ *мА*. Тоді опір вольтметра $R_B = \dfrac{U_2}{I_3} = 1000\,\text{Ом}$. Вольтметр V_1 показує $U_1 = I_1 \cdot R_B = 1.1\text{В}$. Напруга джерела V дорівнює сумі показів вольтметрів V_1, V_2 та падіння напруги на амперметрі A_1: $V = U_1 + U_2 + I_1 R_A$. Знайдемо опір амперметра R_A: $R_A = \dfrac{U_2}{I_2} = \dfrac{1000}{21}\,\text{Ом}$. Тоді $V = 1.1 + 0.05 + 1.1/21 \approx 1.2\text{В}$.

4. *Пучок α–частинок у досліді Резерфорда падає на тонку фольгу. При цьому невелика частка падаючих частинок відбиваються назад, втрачаючи при цьому частину своєї кінетичної енергії. При детальному дослідженні таких частинок виявилось, що деякі з них втратили 7,8% своєї початкової енергії, а інші – 13,8% початкової енергії. Дайте обгрунтоване пояснення результату досліду.*

   ***Довідка**: α–частинка являє собою ядро атома ^4_2He.*

У досліді Резерфорда спостерігається розсіювання α–частинок в результаті однократних пружніх співударінь із ядрами атомів фольги. Розсіювання назад є результатом центрального удару. Під час такого удару кінетична енергія відбитої частинки відноситься до її початкової енергії як: $\dfrac{(M-m)^2}{(M+m)^2}$, де m – маса α–частинки, M – маса ядра. Зрозуміло, що наявність двох різних коефіцієнтів втрат енергії пояснюється тим, що фольга містить атоми з двома істотно відмінними масами ядер. Після елементарних обчислень легко отримати, що $M_1 = 197$ (золото), $M_2 = 108$ (срібло)

5. *Для дослідження властивостей нелінійного резистора було проведено такі досліди. Спочатку дослідили залежність опору резистора від температури. При збільшенні температури до $t_1 = 100^\text{o}\text{C}$ миттєво відбувався стрибок опору від $R_1 = 50\,\text{Ом}$ до $R_2 = 100\,\text{Ом}$, при охолодженні зворотній стрибок відбувався при*

$t_2 = 99^\circ\text{C}$. У наступному дослідженні встановили, що при прикладанні до резистора постійної напруги $U_1 = 60\,\text{В}$ він нагрівається до температури $t_3 = 80^\circ\text{C}$. Нарешті, коли до резистора приклали постійну напругу $U_2 = 80\,\text{В}$, у колі виникли спонтанні коливання струму. Температура повітря в лабораторії залишалась сталою і дорівнювала $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Тепловіддача від резистора прямо пропорційна різниці температур резистора та навколишнього середовища, теплоємність резистора $C = 3\,\text{Дж/К}$. Визначте період T цих коливань та мінімальне і максимальне значення сили струму.

Позначимо символом α коефіцієнт пропорційності між розсіяною на резисторі потужністю та різницею температур резистора та навколишнього повітря. Тоді, оскільки при напрузі $U_1 = 60\,\text{В}$ температура резистора стала і становить $t_3 = 80^\circ\text{C}$, то можна записати, що

$$U_1^2 / R_1 = \alpha(t_3 - t_0) \tag{1}$$

При прикладанні напруги $U_2 = 80\,\text{В}$ температура резистора зростає. Коли вона досягає значення $t_1 = 100^\circ\text{C}$, опір резистора стрибкоподібно збільшується удвічі до значення $R_2 = 100\,\text{Ом}$. При цьому удвічі зменшується кількість теплоти, що виділяється при проходженні струму, і, якщо прикладена напруга не надто велика, то відведення теплоти почне переважати її виділення, внаслідок чого резистор почне охолоджуватись. Коли температура резистора впаде до значення $t_2 = 99^\circ\text{C}$, його опір стрибкоподібно зменшиться, і процес почне повторюватись. Таким чином у колі виникнуть коливання, обумовлені стрибкоподібною залежністю опору від температури.

Температура резистора мало змінюється у процесі коливань і може вважатись сталою. Для визначеності покладемо її рівною $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Нехай T_1 – час нагрівання резистора від 99°C до 100°C, а T_2 – час його охолодження від 100°C до 99°C. Тоді період коливань складе $T = T_1 + T_2$. Запишемо рівняння теплового балансу:

$$\begin{aligned} \frac{U_2^2 T_1}{R_1} &= \alpha(t_1 - t_0)T_1 + C(t_1 - t_2) \\ \frac{U_2^2 T_1}{R_2} &= \alpha(t_1 - t_0)T_1 - C(t_1 - t_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Враховуючи (1), отримаємо:

$$T_1 = \frac{C(t_1 - t_2)}{U_2^2 / R_1 - U_1^2 (t_1 - t_0) / [R_1 (t_3 - t_0)]}$$

$$T_2 = \frac{C(t_1 - t_2)}{U_1^2 (t_1 - t_0) / [R_1 (t_3 - t_0)] - U_2^2 / R_2}$$

Підстановка числових значень дає, що $T_1 = T_2 \approx 0{,}1\,\text{с}$, $T = 0{,}2\,\text{с}$.

Максимальний та мінімальний струм: $I_{\max} = U_2 / R_1 = 1{,}6\text{А}$, $I_{\min} = U_2 / R_2 = 0{,}8\text{А}$.

11 клас

1. *З балкона останнього поверху шістнадцятиповерхового будинку кидають волейбольний м'яч. Визначити його прискорення відразу після удару об горизонтальну поверхню асфальту. Зіткнення вважати пружним.*

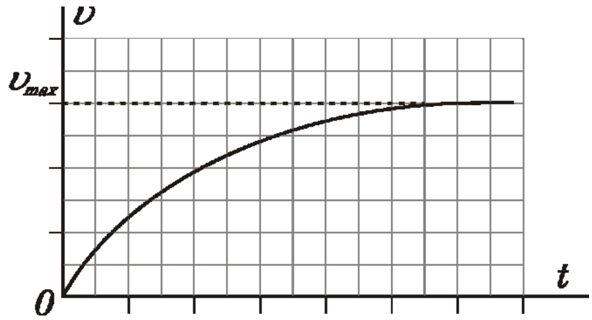


Рис. 1

Розв'язок. На м'яч діють сила тяжіння та сила опору повітря, що монотонно зростає із швидкістю υ. Тому прискорення м'яча зменшується з часом. При падінні з достатньо великої висоти сила опору врівноважує силу тяжіння, і м'яч падає із сталою швидкістю υ_{max}. Якісний характер залежності швидкості υ від часу t наведено на рисунку 1. Внаслідок пружного удару швидкість міняє напрямок на протилежний, а її абсолютне значення зберігається. Відповідно сила опору стає співнаправленою із силою тяжіння і у перший момент дорівнює їй за величиною. Отже, прискорення м'яча складає $2g$ і спрямоване до землі.

2. *Повітряна куля має об'єм $V = 1{,}1$ м³. Маса тонкої оболонки складає $\mu = 0{,}187$ кг. Температура навколишнього повітря складає $t = 20$℃ при нормальному атмосферному тиску $P_H = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Густина повітря за таких умов $\rho = 1{,}2$ кг/м³. До якої температури треба підігріти повітря всередині кулі, щоб вона відірвалась від землі? На яку висоту підніметься куля, якщо температура повітря в ній підтримується на рівні $t_1 = 110$ ℃ ? Залежність атмосферного тиску P від висоти h визначається за барометричною формулою $P = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$, де P_0 – тиск на висоті $h = 0$, M – молярна маса повітря, T – його абсолютна температура, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала, $g = 9{,}82$ м/с² – прискорення вільного падіння. Число e – основа натурального логарифму, його приблизне значення $e \approx 2{,}72$.*

Розв'язок.

Щоб куля злетіла, її маса разом із оболонкою має стати меншою за масу витісненого повітря:

$$\mu + \frac{MP_0V}{RT_1} < \frac{MP_0V}{RT}$$

де T, T_1 – абсолютна температура оточуючого та нагрітого повітря, P_0 – його тиск, що за умовою дорівнює нормальному атмосферному. Знайдемо T_1:

$$T_1 > \frac{T}{1 - \frac{\mu RT}{MP_0V}}$$

В умові задачі не наведено молярну масу повітря. Виразимо її через відому густину при заданих температурі та тиску:

$$M = \frac{\rho RT}{P_0}$$

З двох останніх формул отримаємо:

$$T_1 > \frac{T}{1 - \frac{\mu}{\rho V}} \approx 341\,\text{K}$$

Отже, куля злетить, якщо повітря нагріти до температури, вищої 68°С.

Якщо $T_1 \approx 383K$, то куля підніметься до висоти, на якій тиск P визначатиметься з умови:

$$\mu + \frac{MPV}{RT_1} = \frac{MPV}{RT}$$

Отримаємо:

$$P = \frac{\mu RTT_1}{MV(T_1 - T)} = \frac{\mu T_1}{\rho V(T_1 - T)} P_0 \approx 0.61 \times 10^5\,Па$$

$$\ln(P / P_0) = -0.51$$

$$\frac{Mgh}{RT} = \frac{\rho gh}{P_0} = 0.51 \quad \Rightarrow \quad h = 4{,}35\,км$$

3. *Електрична батарея, що використовує β–радіоактивність, являє собою герметичну металеву сферу, всередину якої на металевому стрижні вміщено шматочок радіоактивної речовини (рис. 2). Стрижень ізольовано від сфери. Щосекунди розпадається n атомів. Енергія електрона, що утворюється при розпаді, дорівнює W. 1) Визначити Е.Р.С. такої батареї та максимальний струм, який вона спроможна дати.*
2) Нехай батарея замкнена реостатом. Побудувати графік залежності струму від опору реостату.

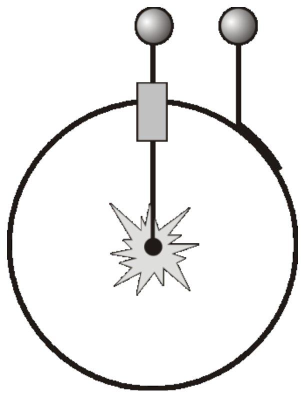
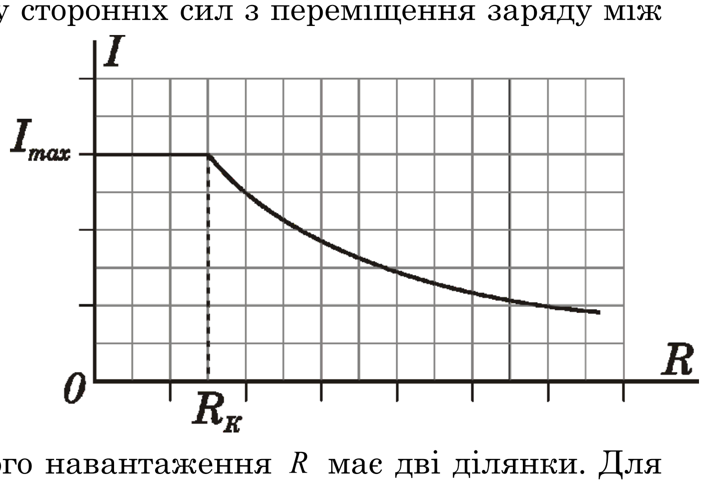


Рис. 2

Розв'язок.

1) Електрорушійна сила характеризує роботу сторонніх сил з переміщення заряду між розімкнутими полюсами батареї. Оскільки робота по переміщенню електрона від джерела радіоактивності до поверхні сфери виконується за рахунок його кінетичної енергії W, то $E.P.C. = W / e$, де e–заряд електрона. Батарея дає максимальний струм, коли всі електрони, що утворюються при розпаді, досягають поверхні сфери. Отже, $I_{\max} = ne$ (Розмірність n – обернена секунда).



2) Залежність струму I від опору зовнішнього навантаження R має дві ділянки. Для великих значень опору $R > \frac{E.P.C.}{I_{\max}} = W / ne^2 = R_K$ маємо $I = \frac{E.P.C.}{R}$, тобто батарея працює

як джерело напруги. Для малих опорів $R < R_K$ $I = I_{max}$, батарея працює як джерело струму. Графік $I(R)$ наведено нижче.

4. *Тонкий шар прозорого скла, що має товщину 1 мм та показник заломлення n_0 = 1.6, нанесений на скляну підкладинку з показником заломлення n_1 = 1.4. Над цим шаром знаходиться повітря з показником заломлення n_2 = 1. Всередині шару в точці А знаходиться точкове джерело світла, що випромінює короткі імпульси тривалістю $\tau_0 = 10^{-9}$ с (рис. 3). Яка тривалість імпульсів, що спостерігаються в точці В, яка знаходиться всередині шару на відстані 10 м ? Яка картина буде спостерігатися в цій точці, якщо інтервали між імпульсами становлять $2 \cdot 10^{-9}$ с?*

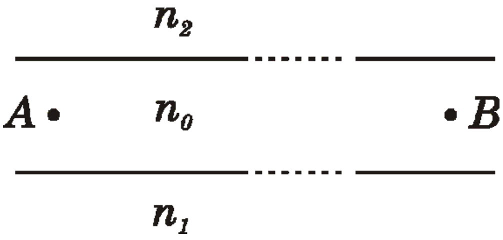


Рис. 3

Розв'язок.

Кут повного внутрішнього відбивання α від нижньої границі: $\sin\alpha = 7/8$, на верхній границі його величина менша. Тому всі промені, що йдуть від джерела світла і падають на границі під кутами, більшими за α, зазнають багатократного повного внутрішнього відбивання на обох границях і потрапляють в область спостереження (рис. 4).

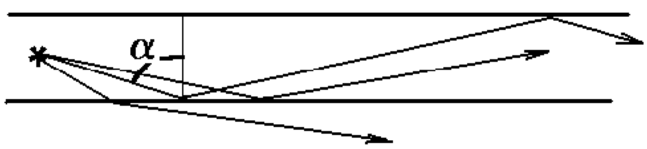


Рис. 4

Найдовша променева траєкторія має довжину $10/\sin\alpha \approx 11.4$м, найкоротша – 10 м. Час запізнення импульсу, що іде по найдовшій траєкторії: $(11.4-10)/(3\cdot10^8)\times1.6 \approx 7.5\cdot10^{-9}$ с. (Тут враховано залежність швидкості світла від показника заломлення). Отже тривалість окремого імпульсу у точці спостереження τ_0 + 7.5 нс = 8.5 нс. При інтервалах між імпульсами 2 нс вони зливатимуться у неперервний сигнал.

5. *Для дослідження властивостей нелінійного резистора були проведені такі досліди. Спочатку дослідили залежність опору резистора від температури. При збільшенні температури до $t_1 = 100^\circ$C миттєво відбувався стрибок опору від $R_1 = 50$ Ом до $R_2 = 100$ Ом, при охолодженні зворотній стрибок відбувався при $t_2 = 99^\circ$C. У наступному дослідженні встановили, що при прикладанні до резистора постійної напруги $U_1 = 60$ В він нагрівається до температури $t_3 = 80^\circ$C. Нарешті, коли до резистора приклали постійну напругу $U_2 = 80$ В, у колі виникли спонтанні коливання струму. Температура повітря в лабораторії залишалась сталою і дорівнювала $t_0 = 20^\circ$C. Тепловіддача від резистора прямо пропорційна різниці температур резистора та навколишнього середовища, теплоємність рези-*

стора $C = 3$ Дж/К. Визначте період T цих коливань та мінімальне і максимальне значення сили струму.

Розв'язок.

Позначимо символом α коефіцієнт пропорційності між розсіяною на резисторі потужністю та різницею температур резистора та навколишнього повітря. Тоді, оскільки при напрузі $U_1 = 60$ В температура резистора стала і становить $t_3 = 80^{\circ}$C, то можна записати, що

$$U_1^2 / R_1 = \alpha(t_3 - t_0) \qquad (1)$$

При прикладанні напруги $U_2 = 80$ В температура резистора зростає. Коли вона досягає значення $t_1 = 100^{\circ}$C, опір резистора стрибкоподібно збільшується удвічі до значення $R_2 = 100$ Ом. При цьому удвічі зменшується кількість теплоти, що виділяється при проходженні струму, і, якщо прикладена напруга не надто велика, то відведення теплоти почне переважати її виділення, внаслідок чого резистор почне охолоджуватись. Коли температура резистора впаде до значення $t_2 = 99^{\circ}$C, його опір стрибкоподібно зменшиться, і процес почне повторюватись. Таким чином у колі виникнуть коливання, обумовлені стрибкоподібною залежністю опору від температури.

Температура резистора мало змінюється у процесі коливань і може вважатись сталою. Для визначеності покладемо її рівною $t_1 = 100^{\circ}$C. Нехай T_1 – час нагрівання резистора від 99°C до 100°C, а T_2 – час його охолодження від 100°C до 99°C. Тоді період коливань складе $T = T_1 + T_2$. Запишемо рівняння теплового балансу:

$$\begin{aligned} \frac{U_2^2 T_1}{R_1} &= \alpha(t_1 - t_0)T_1 + C(t_1 - t_2) \\ \frac{U_2^2 T_1}{R_2} &= \alpha(t_1 - t_0)T_1 - C(t_1 - t_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

Враховуючи (1), отримаємо:

$$T_1 = \frac{C(t_1 - t_2)}{U_2^2 / R_1 - U_1^2 (t_1 - t_0) / [R_1 (t_3 - t_0)]}$$

$$T_2 = \frac{C(t_1 - t_2)}{U_1^2 (t_1 - t_0) / [R_1 (t_3 - t_0)] - U_2^2 / R_2}$$

Підстановка числових значень дає, що $T_1 = T_2 \approx 0{,}1$ c, $T = 0{,}2$ c.

Максимальний та мінімальний струм: $I_{\max} = U_2 / R_1 = 1{,}6$A, $I_{\min} = U_2 / R_2 = 0{,}8$A.