9 клас

1. *Учень має виготовити електричний нагрівач максимальної потужності. У нього є джерело постійної напруги U = 30 В і два шматки дроту з одного матеріалу. Обидва шматки дроту мають однакову довжину, але площі їх перетину відрізняються вдвічі. Відомо, що опір всього шматка товстого дроту дорівнює 68 Ом, а максимальний струм, який можна тривалий час пропускати таким дротом, дорівнює I_1 = 2,5 А. Про тонкий дріт відомо, що він може використовуватися при струмі не більше I_2 = 1,5 А. Як учень зможе виконати завдання, і якою буде потужність нагрівача? Дріт можна розрізати і з'єднувати довільним чином.*

Розв'язок. При сталій напрузі джерела максимальна потужність досягається при мінімальному опорі навантаження, тобто при паралельному з'єднанні нагрівальних елементів відповідного опору. Оскільки максимальний струм для товстого дроту становить *2,5 А*, то мінімальний опір нагрівального елементу, який виготовлений з одного шматка такого дроту має дорівнювати *12 Ом*, відповідно, для іншого дроту мінімально допустимий опір становить *20 Ом*. Оскільки площі перетину дротів відрізняються вдвічі, то опір всього шматка тонкого дроту дорівнює *136 Ом*. Отже, для отримання максимальної потужності на кожному з елементів треба відрізати від товстого дроту *5* відрізків по *12 Ом* кожний, від тонкого *6* відрізків по *20 Ом* і з'єднати їх паралельно. Решта шматків мають опір *8 Ом* для товстого дроту і *16 Ом* для тонкого. Ще один елемент можна виготовити, послідовно з'єднавши відрізок товстого дроту з двома паралельно з'єднаними відрізками тонкого дроту по *8 Ом* кожен, тобто тонкий провід також повністю витрачається. Обмеження за струмом визначається товстим проводом і становить *2,5 А*. Потужність, що виділяється на всіх паралельно з'єднаних відрізках дротів, складе $P = U\cdot(6I_1 + 6I_2) = 720$ *Вт*.

2. *Ведмідь з постійною швидкістю рухається до озера. Маша щоразу згадує, що він щось залишив вдома і біжить за Ведмедем. Наздогнавши його, з тією самою швидкістю повертається додому. Перший раз Маша подолала відстань «дім-Ведмідь-дім» за час T_1 = 4 хв. Другий раз відстань «дім-Ведмідь-дім» вона пробігла за T_2 = 6 хв. За який час Маша пробіжить цю відстань в третій раз? Відомо, що біля Ведмедя та вдома Маша не затримується і до озера лише одна стежка.*

Розв'язки.

Аналітичний. Від моменту першої зустрічі Маші і Ведмедя до моменту другої пройшов час $\frac{T_1+T_2}{2}$. Відстань від дому до місця першої зустрічі дорівнює $AB = \vartheta_М \frac{T_1}{2}$, до місця другої зустрічі $AC = \vartheta_М \frac{T_2}{2}$. Переміщення Ведмедя (*BC*) можна виразити двома способами:

$$BC = \vartheta_В \frac{T_1+T_2}{2} \text{ і } BC = \vartheta_М \frac{T_2-T_1}{2} \Rightarrow \vartheta_В \frac{T_1+T_2}{2} = \vartheta_М \frac{T_2-T_1}{2};\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{\vartheta_В+\vartheta_М}{\vartheta_М-\vartheta_В}$$

Під час третього «циклу», отримаємо аналогічне співвідношення

$$\vartheta_В \frac{T_2+T_3}{2} = \vartheta_М \frac{T_3-T_2}{2};\ \frac{T_3}{T_2} = \frac{\vartheta_В+\vartheta_М}{\vartheta_М-\vartheta_В}\ \ T_3 = \frac{T_2^2}{T_1} = 9 \text{ хв}$$

Графічний. Побудуємо графіки руху *x = x (t)* Маші та Ведмедя (рис. 9.1).

Відомо, що Маша рухалась з постійною за модулем швидкістю до Ведмедя та назад.

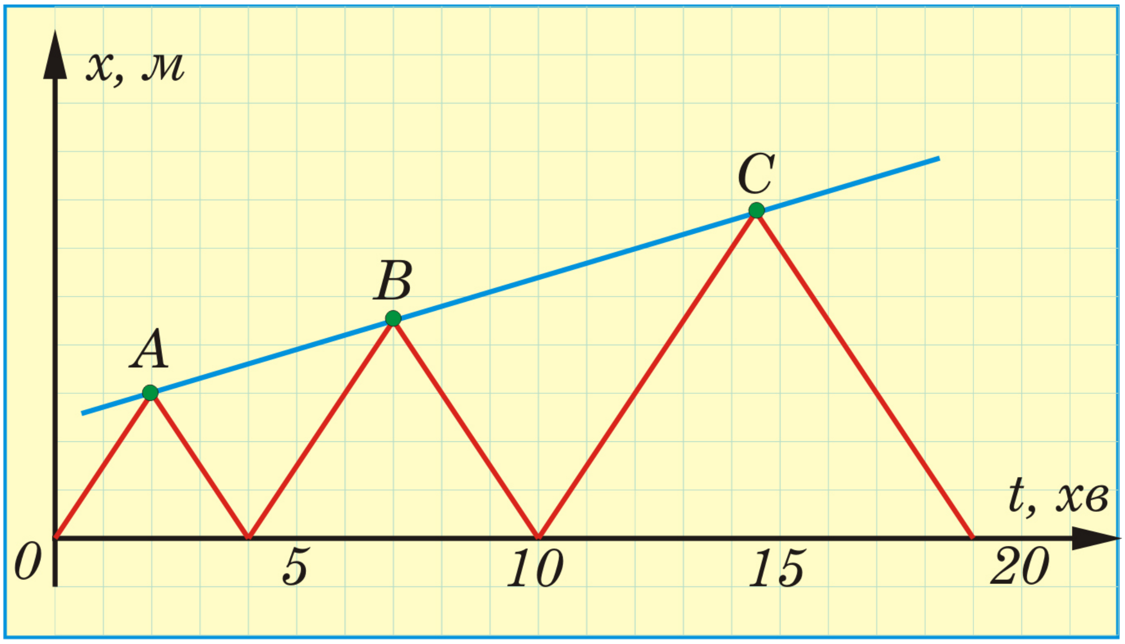

Рис. 9.3

Отже, графік її руху під час першого й другого циклів будуть представляти відрізки з однаковим кутом нахилу до осі часу. Основи «умовних» трикутників відповідно дорівнюють *4* й *6 хв*. В точках *A* і *B* Маша наздоганяла Ведмедя. Отже, ці точки визначають графік руху Ведмедя (швидкість Ведмедя стала, графіком є пряма лінія). Щоб розв'язати задачу побудуємо графік руху Маші під час третього циклу і визначимо час її руху. $T_3 = 9$ *хв*.

3. *У склянці з водою плаває дерев'яна шайба з циліндричним наскрізним отвором. Осі шайби та отвору паралельні. Площа дна склянки S, площа перерізу отвору S_1. Отвір обережно заповнюють олією. На яку висоту підніметься шайба, якщо спочатку її частина, що виступала з води, мала висоту h. Густина олії ρ, густина води ρ_0. Відомо, що вся олія залишилась в отворі.*

Розв'язок. Нехай спочатку шайба плаває у нескінченному резервуарі з водою (рис. 9.2 а). Тоді різниця тисків біля нижньої грані шайби і на поверхні води складе величину $\Delta p = \rho_0 g (d - h)$ (1).

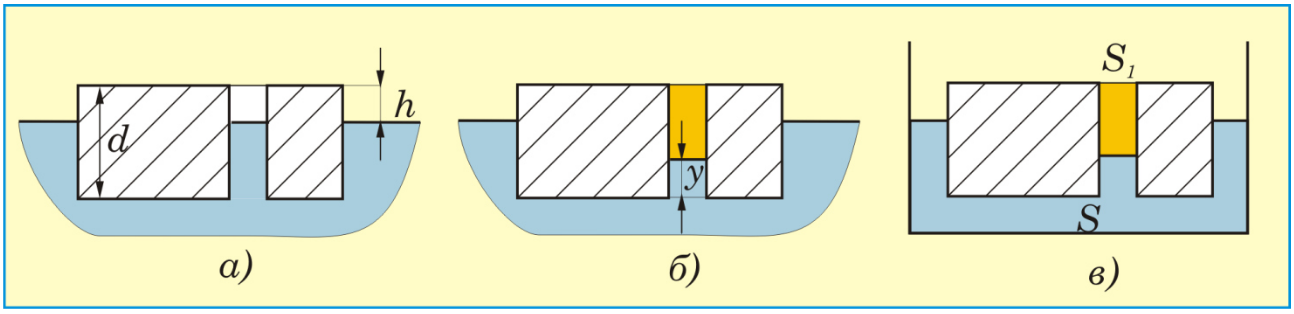

Рис. 9.2

Якщо в отвір налити олію, частина води з нього витиснеться, але різниця тисків біля нижньої грані шайби і на поверхні води не зміниться, тому $\Delta p = \rho_0 g\, y + \rho\, g\, (d - y)$ (2).

Із системи (1)–(2) знаходимо, що $y = d - h\, \frac{\rho_0}{(\rho_0 - \rho)}$ (3).

Об'єм води, витісненої з отвору, складає з урахуванням (3) величину

$$V = S_1\,(d - y) = S_1\, h\, \frac{\rho}{(\rho_0 - \rho)} \quad (4).$$

Якщо шайба плаває в нескінченному резервуарі, витіснена вода не вплине на її місцезнаходження. Якщо ж шайба плаває у склянці, можна вважати, що витіснена вода утворить шар на дні склянки висотою

$$x = \frac{V}{S} = h\, \frac{S_1}{S}\, \frac{\rho}{(\rho_0 - \rho)} \quad (5).$$

Оскільки положення шайби щодо поверхні води при цьому не зміниться, вона підніметься разом із поверхнею води на висоту (5).

4. *На даху утворились бурульки конічної форми із однаковим кутом при вершині, але з різною довжиною (від найменшої L_0 = 10 см до найбільшої L_1 = 50 см). Коли температура повітря підвищилась понад 0°С, то найменша бурулька розтанула за час t_0 = 1 год. Через який час при незмінній температурі повітря розтануть усі бурульки?*

Розв'язок. Кількість теплоти Q, що надходить до бурульки з оточуючого середовища, пропорційна площі її поверхні й часу та йде на плавлення льоду: $Q = m \cdot \lambda$, де λ – питома теплота плавлення льоду. Маса льоду, що розтанув за час t дорівнює $m = \rho \cdot S \cdot \Delta h$, де Δh – товщина шару льоду, що розтанув, яка пропорційна зміні довжини бурульки, оскільки остання тане з поверхні, зберігаючи свою форму.

Отримаємо, що $Q = m \cdot \lambda = \rho \cdot S \cdot \Delta h \cdot \lambda \sim \rho \cdot S \cdot \Delta L \cdot \lambda \sim S \cdot \Delta t$, звідки $\Delta L / \Delta t \sim 1 / \rho \cdot \lambda$.

Таким чином, довжина бурульки зменшується зі сталою швидкістю, і бурулька довжиною L_1 розтане за час $t = t_0 \cdot L_1 / L_0 = 5$ год.

5. *Вантаж невідомої маси зважують, зрівноваживши його гирькою відомою маси M на кінцях важкого прямого коромисла; при цьому рівновага досягається, коли точка опори коромисла зміщується від його середини на $x = 1/4$ його довжини в бік гирьки. За відсутності вантажу на другому плечі коромисло залишається в рівновазі при зміщенні його точки опори від середини в бік гирьки на $y = 1/3$ його довжини. Вважаючи коромисло однорідним за довжиною, знайдіть масу вантажу m.*

Розв'язок. При зважуванні вантажу невідомої маси m на плечі коромисла довжиною L діють сили mg, Mg і $m_к g$, де $m_к$ – маса коромисла (рис. 9.4). Плечі цих сил відносно вісі, що проходить через точку опору перпендикулярно площині рисунка, дорівнюють $(0{,}5 + x)\, L$, $(0{,}5 - x)\, L$ і xL відповідно. Умова рівноваги важеля має вигляд:

$$mg\,(0{,}5 + x)\, L + m_к\, g\, x\, L = Mg\,(0{,}5 - x)\, L, \text{ звідки: } m = \frac{M\,(0{,}5 - x) - m_к x}{0{,}5 + x}.$$

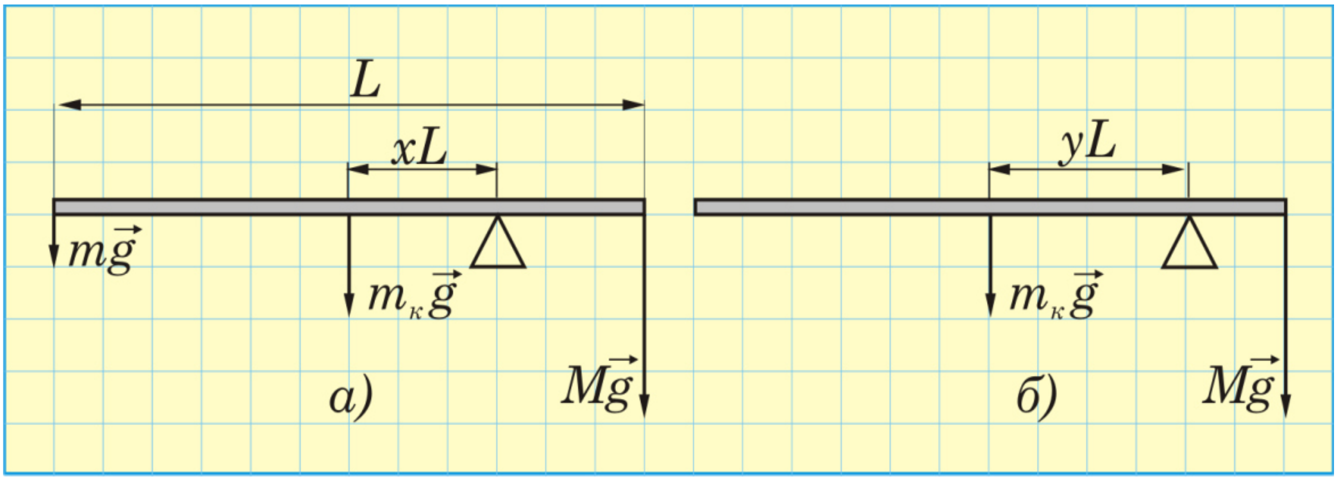

Рис. 9.4

Розглянемо тепер друге зважування (без вантажу невідомої маси), яке дозволить нам знайти масу коромисла. Плечі сил Mg і $m_кg$ будуть тепер дорівнювати $(0,5 - y)\ L$ і yL відповідно. Тоді умова рівноваги важеля дає:

$$m_кg\ y\ L = Mg\ (0,5 - y)\ L, \text{ звідки } m_к = \frac{M\ (0,5 - y)}{y}.$$

Отже, $m = \dfrac{M\ (0,5-x) - \frac{M\ (0,5-y)}{y} \cdot x}{0,5+x} = M\ \dfrac{y-x}{y\ (1+2x)} = M\ \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\ (1+2\cdot\frac{1}{4})} = \dfrac{M}{6}.$