10 клас

1. *Учень має виготовити електричний нагрівач максимальної потужності. У нього є джерело постійної напруги $U = 30$ В і два шматки дроту з одного матеріалу. Обидва шматки дроту мають однакову довжину, але площі їх перетину відрізняються вдвічі. Відомо, що опір всього шматка товстого дроту дорівнює 68 Ом, а максимальний струм, який можна тривалий час пропускати таким дротом, дорівнює $I_1 = 2{,}5$ А. Про тонкий дріт відомо, що він може використовуватися при струмі не більше $I_2 = 1{,}5$ А. Як учень зможе виконати завдання, і якою буде потужність нагрівача? Дріт можна розрізати і з'єднувати довільним чином.*

Розв'язок. При сталій напрузі джерела максимальна потужність досягається при мінімальному опорі навантаження, тобто при паралельному з'єднанні нагрівальних елементів відповідного опору. Оскільки максимальний струм для товстого дроту становить *2,5 А*, то мінімальний опір нагрівального елементу, який виготовлений з одного шматка такого дроту має дорівнювати *12 Ом*, відповідно, для іншого дроту мінімально допустимий опір становить *20 Ом*. Оскільки площі перетину дротів відрізняються вдвічі, то опір всього шматка тонкого дроту дорівнює *136 Ом*. Отже, для отримання максимальної потужності на кожному з елементів треба відрізати від товстого дроту *5* відрізків по *12 Ом* кожний, від тонкого *6* відрізків по *20 Ом* і з'єднати їх паралельно. Решта шматків мають опір *8 Ом* для товстого дроту і *16 Ом* для тонкого. Ще один елемент можна виготовити, послідовно з'єднавши відрізок товстого дроту з двома паралельно з'єднаними відрізками тонкого дроту по *8 Ом* кожен, тобто тонкий провід також повністю витрачається. Обмеження за струмом визначається товстим проводом і становить *2,5 А*. Потужність, що виділяється на всіх паралельно з'єднаних відрізках дротів, складе $P = U \cdot (6I_1 + 6I_2) = 720$ *Вт*.

2. *Космічна експедиція відкрила планету, схожу на Землю, яка має таку саму масу M та радіус R. Згодом виявилось, що половина маси планети зосереджена в ядрі радіуса $R/2$, центр якого зміщений на $R/4$ відносно центру планети. В яких межах змінюється прискорення сили тяжіння на поверхні планети?*

Розв'язок. На рис. 10.1 схематично зображено будову планети в перерізі. Очевидно, що максимальне та мінімальне значення прискорення вільного падіння знаходяться в точках A та B, розташованих на кінцях діаметра, що проходить через центри планети O_1 та ядра O_2.

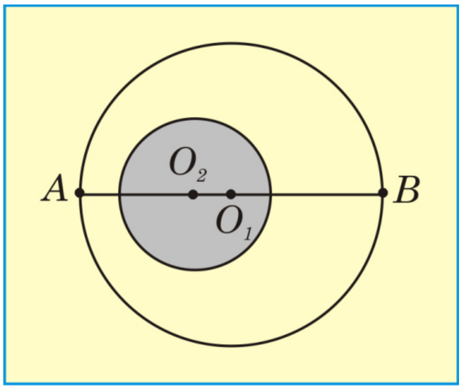

Рис. 10.1

Розрахуємо густини ядра планети та самої планети, враховуючи, що об'єм речовини планети дорівнює повному об'єму без урахування ядра:

$$\rho_1 = \frac{M/2}{4/3\pi R^3 - 4/3\pi R^3/8} = \frac{3M}{7\pi R^3} \quad (2.1)$$

$$\rho_2 = \frac{M/2}{4/3\pi R^3/8} = \frac{3M}{\pi R^3} \quad (2.2)$$

Відомо, що у випадку рівномірного розподілу маси кулі дія гравітації буде такою, якби вся маса була зосереджена в центрі. Тоді гравітаційне поле можна подати як суперпозицію поля планети з густиною ρ_1 та ядра з густиною $\rho_2-\rho_1$.

Таким чином, з урахуванням викладених вище міркувань, прискорення вільного падіння в т.А дорівнюватиме:

$$g_A = G\left[\frac{\rho_1 V_1}{R^2}+\frac{(\rho_2-\rho_1)V_2}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2}\right] = G\left[\frac{8\rho_1 V_2}{R^2}+\frac{16(\rho_2-\rho_1)V_2}{9R^2}\right] =$$

$$= \frac{8GV_2}{9R^2}(7\rho_1+2\rho_2) = \frac{4}{3}\frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}g_0$$

де $g_0 = \dfrac{GM}{R^2} = 9{,}81\,м/с^2$.

Аналогічно знайдемо прискорення вільного падіння в т. B:

$$g_B = G\left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2}-\frac{\rho_1 V_2}{\left(5/_4 R\right)^2}+\frac{\rho_2 V_2}{\left(5/_4 R\right)^2}\right) = G\left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2}+\frac{(\rho_2-\rho_1)V_2}{\left(5/_4 R\right)^2}\right) =$$

$$= G\left(\frac{8\rho_1 V_2}{R^2}+\frac{16(\rho_2-\rho_1)V_2}{25R^2}\right) = \frac{8GV_2}{25R^2}(23\rho_1+2\rho_2) = \frac{148}{175}\frac{GM}{R^2} = \frac{148}{175}g_0$$

Розрахуємо чисельно значення прискорення вільного падіння в т. A та т. B: $g_A = 13{,}1\,м/с^2$, $g_B = 8{,}3\,м/с^2$.

3. *На даху утворились бурульки конічної форми із однаковим кутом при вершині, але з різною довжиною (від найменшої L_0=10 см до найбільшої L_1=50 см). Коли температура повітря підвищилась понад 0 ℃, то найменша бурулька розтанула за час t_0=1 год. Через який час при надалі незмінній температурі повітря розтануть усі бурульки?*

Розв'язок. Кількість теплоти Q, що надходить до бурульки з оточуючого середовища, пропорційна площі її поверхні та часу, який йде на плавлення льоду: $Q = m\cdot\lambda$, де λ – питома теплота плавлення льоду. Маса льоду, що розтанув за час t дорівнює $m = \rho\cdot S\cdot\Delta h$, де Δh – товщина шару льоду, що розтанув, яка пропорційна зміні довжини бурульки, оскільки остання тане з поверхні, зберігаючи свою форму.

Отримаємо, що $Q = m\cdot\lambda = \rho\cdot S\cdot\Delta h\cdot\lambda \sim \rho\cdot S\cdot\Delta L\cdot\lambda \sim S\cdot\Delta t$, звідки $\Delta L/\Delta t \sim 1/\rho\cdot\lambda$.

Таким чином, довжина бурульки зменшується зі сталою швидкістю, і бурулька довжиною L_1 розтане за час $t = t_0\cdot L_1/L_0 = 5$ *год.*

4. *Рибалка знаходиться на окремій крижині прямокутної форми, горизонтальні розміри якої значно більші за товщину. Крижина плаває на воді поряд із берегом і може витримати розміщену в її центрі масу M. Рибалка якої маси m може, не замочивши ніг, зійти з крижини в середині її ребра без відштовхування? Густину криги вважати 0,9 г/см³.*

Розв'язок. Маса m на середині крижини занурить її на $h = \frac{m}{M}\cdot\frac{H}{10}$. При зміщенні маси на середину ребра центр мас крижини практично не зміниться відносно рівня води, а сама крижина нахилиться на деякий кут α до горизонту. Момент сили виштовхування, що діє на смужки шириною Δx та довжиною l, розміщені на відстані $-L/2 \le x \le L/2$ від центра мас: $N_0 = \rho g \alpha l x^2 \Delta x$, а сумарний момент сил $N = \rho g \alpha l L^3/12$ (ρ – густина води). Цей момент врівноважує момент сил з боку маси m: $\rho g \alpha l L^3/12 = mgL/2$. Звідси величина додаткового опускання краю крижини внаслідок її нахилу $h_2 = \alpha L/2 = 3m/(\rho l L)$. Разом із опусканням центра мас по вертикалі h загальне зміщення краю крижини с масою m не повинно бути більшим за $H/10$: $h + h_2 = \frac{m}{M} \cdot \frac{H}{10} + \frac{3\,m}{\rho l L} < \frac{H}{10}$. Враховуючи, що $M = \rho S l H/10$, отримаємо $m < M/4$.

5. *Якою має бути найменша відстань між предметом та його дійсним зображенням, отриманим за допомогою тонкої збиральної лінзи з фокусною відстанню f?*

Розв'язок. 1. Формальний розв'язок через рівняння лінзи. Запишемо рівняння лінзи у формі

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Очевидно, що $l = a + b$ – відстань між предметом та його дійсним зображенням. Виключивши b, отримаємо:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} = \frac{1}{f}, \quad (2) \quad \text{звідки} \quad l = \frac{a^2}{a-f}. \quad (3)$$

Тривіальний шлях знаходження мінімуму l для тих, хто знайомий з диференціюванням: $dl/da = 0$, звідки $a = 2f$, $l = 4f$.

Якщо учні не знайомі з диференціюванням, можна ввести безрозмірну змінні $y = l/f$ і $x = a/f$, так що $y = \frac{x^2}{x-1}$. Побудувавши по точках графік $y\ x$, переконуємося, що його мінімум $y = 4$ досягається при $x = 2$ (рис. 1).

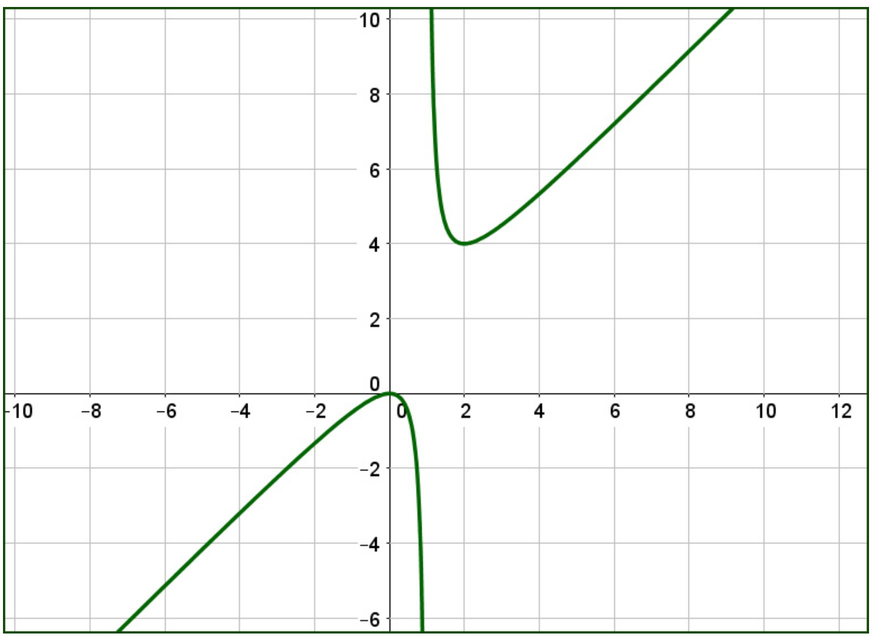

Рис. 10.2

2. Нетривіальний шлях. Намалюємо хід променів у системі (рис. 2). Щоб зображення було дійсним, необхідно, щоб предмет розташовувався на віддалі від лінзи, що перевищує її фокусну віддаль.

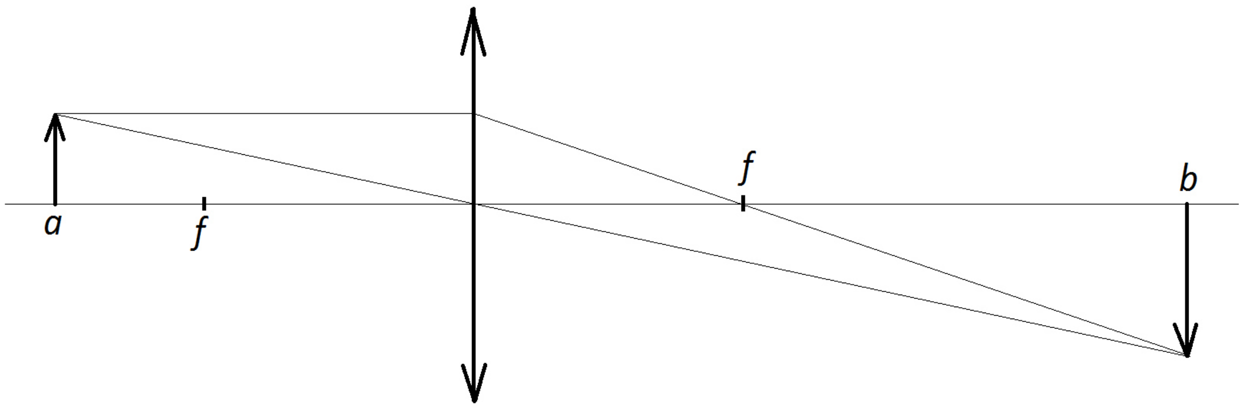

Рис. 10.3

Якщо предмет наближається до фокусу, зображення віддаляється на нескінченність. З іншого боку, якщо поміняти зображення і предмет, хід променів не зміниться. Очевидно, мінімальна віддаль між предметом та зображенням відповідає симетричній конфігурації, коли віддалі від лінзи до предмету і його зображення однакові. З рівняння лінзи (1) тоді випливає, що $a = b = 2f$, $l = 4f$.