11 клас

1. *Експериментатор запустив секундомір у момент часу, коли в чайнику закипіла вода. Вся води випіпіла через 1781 секунд. Після цього він заповнив чайник льодом тієї ж маси за нульової температури, запалив газ та одночасно запустив секундомір. До журналу дослідник записав, що в другому випадку чайник закипів через 2θ75 секунд. Цифра θ була зображена нерозбірливо, це може бути 0, 3 або 6. Яку цифру записано в журналі? Теплоємність води с = 4,2·10³ Дж/(кг·К), теплота плавлення льоду λ = 3,34·10⁵ Дж/кг, теплота пароутворення q = 2,26·10⁶ Дж/кг.*

*Розв'язок***.** Енергія, необхідна для випаровування води масою m : $Q_1 = qm$ (1.1). Позначивши як P корисну потужність чайника, можемо записати наступний вираз: $Pt_1 = qm$, (1.2) де t_1 = *1781 с.*
В другій частині експерименту слід здійснити наступні процеси: 1) розтопити лід, 2) нагріти воду до температури кипіння, 3) випарувати воду.
Загальна енергія, необхідна для цього, запишеться так:

$$Q_2 = \lambda m + cm\Delta T + qm \qquad (1.3)$$

Враховуючи вираз (1.2), перепишемо (1.3) таким чином:

$$Pt_2 = \lambda m + cm\Delta T + qm \quad (1.4)$$

В другому випадку енергія, отримана від чайника, становить $Q_2 = Pt_2$. Врахувавши це та вираз (1.4), можемо записати наступне:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\lambda + c\Delta T}{q} + 1 \qquad (1.5)$$

Тепер можемо знайти вираз для знаходження часу t_2:

$$t_2 = t_1\left(\frac{\lambda + c\Delta T}{q} + 1\right) .6)$$

Підставимо числові значення:

$$t_2 = 1781\left(\frac{3{,}34 \times 10^5 + 4{,}2 \times 10^5}{2{,}26 \times 10^6} + 1\right) \approx 2375\ c$$

Таким чином, цифра, записана експериментатором в журналі, $\theta = 3$.

В той же час, даний розв'язок отриманий без урахування втрат тепла, які у другому випадку, очевидно, будуть більшими, оскільки час нагрівання також більший. В свою чергу, в умові не зазначено, чи можна знехтувати цими втратами. Також в умові стверджується, що чайник у другому випадку закипів через 2θ75 секунд (саме «закипів» а не «википів»). Усі учасники олімпіади, що зазначили цей недолік умови задачі та спробували отримати точніший розв'язок, отримали за дану задачу додаткові бали (до 2). Максимальна оцінка за наведений вище базовий варіант розв'язку – 8 балів з 10.

2. *Визначте максимальне прискорення, з яким може злітати вертикально гвинтокрил, власна маса якого M, потужність двигуна P, діаметр гвинта – d із вантажем на борту масою m.*

Розв'язок. Вважаємо, що гвинтокрил відкидає вниз потік повітря густиною ρ з перерізом $\frac{\pi d^2}{4}$ зі швидкістю u. Тоді за час t гвинт надасть повітрю масою $m_0 = \Delta m = \rho \frac{\pi d^2}{4} u t$ (1) імпульс $p = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2 t$ (2) і кінетичну енергію $W = \rho \frac{\pi d^2}{8} u^3 t$ (3). Сила тяги гвинта буде $F = \frac{p}{t} = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2$ (4). Невідому швидкість повітря знайдемо з умови, що вся потужність двигуна витрачається на створення потоку повітря: $\frac{W}{t} = P$ (5), звідки з урахуванням (3) $u = \left(\frac{8P}{\pi \rho d^2}\right)^{1/3}$ (6).

Остаточно сила тяги з урахуванням (6) набуває вигляду $F = (\pi\rho)^{1/3}(Pd)^{2/3}$ (7).

Шукане прискорення визначається різницею сили тяги гвинта і ваги гвинтокрила, віднесеною до сумарної маси:

$$a = \frac{F}{M+m} - g = \frac{(\pi\rho)^{\frac{1}{3}}(P\,d)^{\frac{2}{3}}}{M+m} - g \quad (8).$$

3. *Підводний човен, занурений на глибину r = 200 м здійснює пуск торпеди в напрямку надводного корабля, що пливе на прямій відстані a = 3 км від човна. Визначте мінімальний час, через який гідроакустичні приймачі корабля зможуть зафіксувати звук пуску торпеди, якщо постійна глибина дна становить h = 500 м, а швидкості поширення звуку у воді та ґрунті дна відповідно u=1500 м/с та* υ *=4000 м/с.*

Розв'язок. Шляхом, по якому при даних параметрах звук дійде до корабля за найменший час, буде очевидно *msl*. Час його проходження:

$$t = \frac{m}{u} + \frac{b-x-y}{\vartheta} + \frac{l}{u} = \frac{\sqrt{(h-r)^2 + y^2}}{u} + \frac{b-x-y}{\vartheta} + \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{u}$$

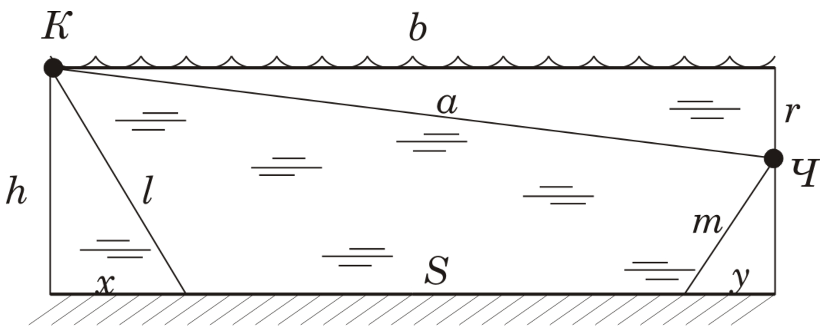


Рис. 11.1

Для знаходження мінімального часу, знаходимо похідні від функції $t\,(x, y)$ послідовно по змінним x та y, вважаючи іншу змінну при цьому сталою:

$$t'_x = -\frac{1}{\vartheta} - \frac{2x}{2u\cdot\sqrt{h^2+x^2}}, \text{ звідки } x = \frac{uh}{\sqrt{\vartheta^2 - u^2}}.$$

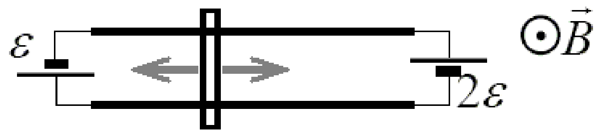
$$t'_y = -\frac{1}{\vartheta} - \frac{2y}{2u\cdot\sqrt{(h-r)^2+y^2}}, \text{ звідки } y = \frac{u\,(h-r)}{\sqrt{\vartheta^2 - u^2}}.$$

Підставляючи отримані значення x та y в першу формулу, отримаємо шуканий час:

$$t = \frac{\sqrt{(h-r)^2 + \frac{u^2\,(h-r)^2}{\vartheta^2 - u^2}}}{u} + \frac{b - \frac{u\,h}{\sqrt{\vartheta^2-u^2}} - \frac{u\,(h-r)}{\sqrt{\vartheta^2-u^2}}}{\vartheta} + \frac{\sqrt{h^2 + \frac{u^2\,h^2}{\sqrt{\vartheta^2-u^2}}}}{u}$$

Проходження звуку будь-яким іншим шляхом (зокрема, по прямій через воду – $t = a/u$ $= 3000/1500 = 2$ с) займатиме більший час. *Відповідь*: $t \approx 1,24$ с.

4. *Паралельні горизонтальні рейки довжиною L і з опором одиниці довжини ρ закріплені паралельно на відстані l одна до одної. До кінців рейок приєднані дві батареї: одна з е.р.с. ε, друга – з е.р.с. 2ε. На рейки встановлюють невеликий металевий (провідний) візок масою m, який може рухатись без тертя уздовж рейок. Вся система знаходиться у вертикальному магнітному полі з індукцією B (див. рис., вигляд зверху). На якій відстані від лівого краю рейок знаходитиметься положення рівноваги візка? Знайдіть період малих коливань візка біля положення рівноваги. Тертям, опором візка, джерел і дротів, а також індуктивністю кола знехтувати.*

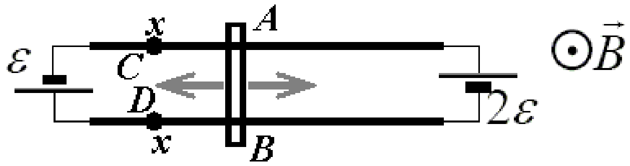


Розв'язок. Візок буде перебувати у рівновазі, якщо струм через нього буде дорівнювати нулю (тоді на нього не діятиме магнітне поле). Це становище можна знайти із законів Ома для замкненого кола і неоднорідної ділянки кола. Згідно із законом Ома для замкненого кола маємо для струму в рейках (при умови, що струм через візок дорівнює нулю):

$$I = \frac{3\varepsilon}{2\rho L} \quad (1)$$

Нехай довжина рейок від положення рівноваги візку до е.р.с. ε дорівнює x. Тоді за законом Ома для ділянки кола *AB*, що містить е.р.с. ε, маємо (за умови, що напруга між його кінцями дорівнює нулю)

$$\varepsilon = 2I\rho x = \frac{3\varepsilon}{L}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{3}$$



Якщо ж розглянути ділянку кола *CD*, що містить е.р.с. ε і коротші, ніж x частини рейок (див. рис.), то із закону Ома для неоднорідної ділянки кола

$$U_{DC} = \varepsilon - Ir \quad (3)$$

де r – опір рейок між точками C і D (через ε), випливає, що $U_{DC} > 0$ (оскільки $r < 2\rho x$). Тому, якщо візок буде зміщуватися з положення рівноваги ліворуч, по ньому починає протікати струм, спрямований вгору (див. рис.), і з боку магнітного поля на візок діє сила Ампера, спрямована праворуч. Аналогічно доводиться, що якщо візок зміститься від положення рівноваги праворуч, то сила Ампера буде направлена ліворуч. Таким чином, при будь-яких зсувах візка в ньому буде виникати електричний струм, і сила Ампера буде повертати візок у положення рівноваги. Це призведе до того, що візок буде здійснювати коливання біля положення рівноваги.

Щоб знайти період коливань, знайдемо повертальну силу. Нехай зміщення візка від положення рівноваги дорівнює Δx, а струми через джерела в цьому положенні рівні I_1 і I_2. Тоді, оскільки напруга на кінцях візка в будь-який який момент часу дорівнює нулю, за законом Ома для ділянки кола між A і B через джерело ε маємо:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{2\rho\left((L/3) - \Delta x\right)} \quad (4)$$

Аналогічно для струму через друге джерело: $I_2 = \dfrac{2\varepsilon}{2\rho\left((2L/3) + \Delta x\right)}$ (5)

З формул (4), (5) можна знайти струм через візок:

$$i = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon}{2\rho} \frac{3\Delta x}{\left((L/3) - \Delta x\right)\left((2L/3) + \Delta x\right)} \approx \frac{27\varepsilon}{4\rho L^2} \Delta x \quad (6)$$

(В останній наближеній рівності використана малість відхилення візка від положення рівноваги у порівнянні з довжиною рейок). З формули (6) випливає, що сила Ампера, яка діє на візок з боку магнітного поля –

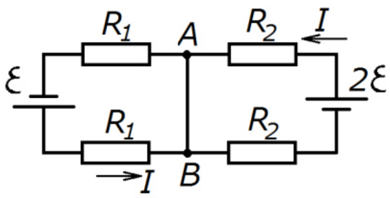
$$F = iBl = \frac{27\varepsilon Bl}{4\rho L^2} \Delta x \quad (7)$$

пропорційна зсуву візка, і, отже, візок буде здійснювати гармонічні коливання з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4m\rho L^2}{27Bl\varepsilon}} . \quad (8)$$

У наведеному вище розв’язку не враховується явище електромагнітної індукції. Розглянемо тепер, до чого приведе її врахування.

Спочатку знайдемо положення рівноваги:



$U_{AB} = 0$

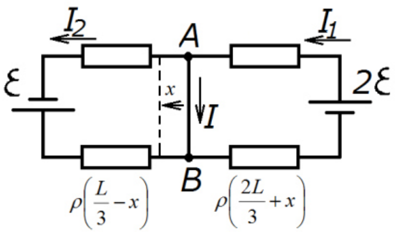
$R_1 = \rho x_0$

$R_2 = \rho(L - x_0)$

За законом Кірхгофа можна записати:

$\varepsilon = 2IR_2$, з іншого боку $3\varepsilon = I(2R_1 + 2R_2)$. Звідси маємо $3R_1 = R_1 + R_2$, тобто $R_1 = R_2/2$

Таким чином, відстань $x_0 = L/3$. Коли візок зміщується відносно положення рівноваги, схема набуває вигляду:



Для цієї схеми можна записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon = -\varepsilon_1 + 2\rho\left(\dfrac{L}{3} - x\right) I_2 \\ 2\varepsilon = \varepsilon_1 + 2\rho\left(\dfrac{2L}{3} + x\right) I_1 \end{cases}$$

Струм через візок буде дорівнювати $I = I_1 - I_2$, і для такого струму на нього у поперечному магнітному полі діятиме сила $ma = B \cdot l \cdot I$. Як ε_1 тут позначено ЕРС електромагнітної індукції, яка за законом Фарадея дорівнює:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dS}{dt} \cdot B = \frac{dx}{dt} \cdot l \cdot B = v \cdot l \cdot B .$$

З системи рівнянь для струмів I_1 та I_2 можна записати вирази:

$$I_1=\frac{2\mathcal{E}-\mathcal{E}_1}{2\rho\left(\frac{2L}{3}+x\right)},\quad I_2=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}_1}{2\rho\left(\frac{L}{3}-x\right)}.$$

Звідси струм через візок:

$$I=I_1-I_2=\frac{2\mathcal{E}-\mathcal{E}_1}{2\rho\left(\frac{2L}{3}+x\right)}-\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}_1}{2\rho\left(\frac{L}{3}-x\right)}=\frac{1}{2\rho}\left(\frac{2\mathcal{E}\frac{L}{3}-2\mathcal{E}x-\mathcal{E}_1\frac{L}{3}+\mathcal{E}_1x-\mathcal{E}\frac{2L}{3}-\mathcal{E}x-\mathcal{E}_1\frac{2L}{3}-\mathcal{E}_1x}{\left(\frac{2L}{3}+x\right)\left(\frac{L}{3}-x\right)}\right).$$

Оскільки за умовою коливання малі, знехтуємо x^2 у знаменнику:

$$I=\frac{1}{2\rho}\left(\frac{-3\mathcal{E}x-\mathcal{E}_1L}{\frac{2L^2}{9}+x\frac{L}{3}-x\frac{2L}{3}-x^2}\right)\approx-\frac{9}{4\rho L^2}\left(\frac{3\mathcal{E}x+\mathcal{E}_1L}{1-\frac{3x}{2L}}\right).$$

Тепер можна застосувати формулу бінома Ньютона $(1+y)^\alpha\approx1+\alpha y$ при $y<<1$. Отримаємо:

$$I=-\frac{9}{4\rho L^2}\left(\frac{3\mathcal{E}x+\mathcal{E}_1L}{1-\frac{3x}{2L}}\right)\approx-\frac{9}{4\rho L^2}(3\mathcal{E}x+\mathcal{E}_1L)\left(1+\frac{3x}{2L}\right)=-\frac{9}{4\rho L^2}\left(3\mathcal{E}x+\mathcal{E}_1L+\mathcal{E}_1\frac{3x}{2}+\frac{9\mathcal{E}x^2}{2L}\right),$$

де знову можна знехтувати доданком з x^2. Врешті отримаємо:

$$I\approx-\frac{9}{4\rho L^2}\left(3\mathcal{E}x+\mathcal{E}_1L+\mathcal{E}_1\frac{3x}{2}\right)=-\frac{9}{4\rho L}\left(3\mathcal{E}\frac{x}{L}+\mathcal{E}_1\frac{3x}{2L}+\mathcal{E}_1\right)$$

Тоді сила, що діє на візок:

$ma=B\cdot l\cdot I=-\frac{9Bl}{4\rho L}\left(3\mathcal{E}\frac{x}{L}+\mathcal{E}_1\frac{3x}{2L}+\mathcal{E}_1\right)$. Запишемо це у вигляді диференціального рівняння:

$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{9Bl}{4\rho L}\left(3\mathcal{E}\frac{x}{L}+\mathcal{E}_1\frac{3x}{2L}+\mathcal{E}_1\right)=-\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}x-\frac{9Bl}{4\rho L}\mathcal{E}_1\left(1+\frac{3x}{2L}\right)$, тобто

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}x+\frac{9Bl}{4\rho L}\mathcal{E}_1\left(1+\frac{3x}{2L}\right)=0.$$

Тепер підставимо сюди вираз для ЕРС індукції $\mathcal{E}_1=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{dS}{dt}\cdot B=\frac{dx}{dt}\cdot l\cdot B=v\cdot l\cdot B$. Отримаємо: $m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}x+\frac{9Bl}{4\rho L}\left(1+\frac{3x}{2L}\right)\frac{dx}{dt}lB=0$. Доданком з $x\frac{dx}{dt}$ можна знехтувати, оскільки коливання є малими. Таким чином, отримаємо рівняння:

$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}x+\frac{9B^2l^2}{4\rho L}\frac{dx}{dt}=0$. Це рівняння згасаючих коливань, частоту яких можна знайти за формулою: $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$, $\omega_0^2=\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}$, $\lambda=\frac{9B^2l^2}{8\rho L}$

Врешті-решт, для частоти коливань отримаємо: $\omega=\sqrt{\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}-\left(\frac{9B^2l^2}{8\rho L}\right)^2}=\frac{9Bl}{2\rho L}\sqrt{\frac{\rho\mathcal{E}}{3Bl}-\frac{B^2l^2}{16}}$, а для періода цих коливань: $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi\rho L}{9Bl\sqrt{\frac{\rho\mathcal{E}}{3Bl}-\frac{B^2l^2}{16}}}$

Отже, при врахуванні явища електромагнітної індукції виявляється, що коливання будуть згасати.

5. *Корпорація SpaceX для повернення першого ступеня своєї ракети-носія Falcon 9 використовує автоматичні баржі в океані, на які можуть сідати ці ступені (використовуючи власні ракетні двигуни). Така баржа являє собою приблизно прямокутний паралелепіпед розмірами 90x50x6 метрів (висота борту становить 6м) та загальною масою 600 тон. Вважаючи, що загальний об'єм конструкцій баржі набагато менший за її внутрішній порожній об'єм, знайдіть глибину занурення дна баржі: а) до посадки першого ступеня ракети. Температура баржі дорівнює температурі довкілля і становить T_0 = 300К, а густина повітря при такій температурі дорівнює ρ_0 = кг/м^3; б) після посадки першого ступеня ракети, вважаючи, що баржа під дією полум'я ракетних двигунів нагрілася до T = 360К, маса першого ступеня після посадки на баржу становить M_R = 34.5 тон, а повітря може вільно виходити з внутрішнього об'єму баржі. Вважати, що густина океанської води $\rho_в$ = 1000 кг/м^3*

Розв'язок: а) Оскільки загальний об'єм конструкцій баржі набагато менший за її внутрішній порожній об'єм, можна вважати, що повітря займає: $V = 90 \cdot 50 \cdot 6 = 27000$ *м*^{3} .
Глибина занурення дна баржі визначається її масою та густиною витисненої води:
$M_0 = 600$ *тон* $= 3{\cdot}10^6$ *кг* $= \rho_в \cdot S \cdot h_0$, де: $S = 90 \cdot 50 = 4500$ *м*^{2} – площа палуби баржі, а h_0 – глибина занурення її дна до посадки першого ступеня.

Маємо: $h_0 = M_0 \;/\; (\rho_в \cdot S) = 2/15$ *м* $\approx 0{,}133$ *м.*

б) Після нагрівання баржі полум'ям ракетних двигунів тиск повітря всередині зросте, і тому частина повітря вийде назовні. В результаті густина повітря всередині, а отже і загальна маса баржі дещо зменшиться.

До посадки першого ступеня маса повітря всередині баржі становила $m_0 = \rho_0 \cdot V = 27000$ *кг* $= 27$ *тон.* За рівнянням стану ідеального газу при сталому тискові повітря маємо: $p \cdot V = m_0 \cdot R \cdot T_0 \;/\; \mu = m \cdot R \cdot T \;/\; \mu$. Звідси маса повітря всередині баржі після посадки буде становити: $m = m_0 \cdot T_0/T = 27000{\cdot}300/360 = 22500$ *кг.* Тоді загальна маса баржі після посадки першого ступеня (враховуючи його масу) становитиме:

$$M = M_0 + m - m_0 + M_R = 600 + 22{,}5 - 27 + 34{,}5 = 630 \text{ тон.}$$

Тоді глибина занурення дна баржі після посадки на неї першого ступеня становитиме: $h = M\,/\,(\rho_в \cdot S) = 0{,}14\ м$.

У наведеному вище розв'язку не враховується архімедова сила, що діє на баржу з боку атмосферного повітря. В той же час, глибина занурення баржі буде досить невеликою, і більша її частина залишиться у повітрі. Для врахування архімедової сила з боку повітря розглянемо рисунок.

Умова рівноваги вертикальних сил, що діють на баржу, до посадки першого ступеня запишеться тоді таким чином: $M_0 g = \rho_в g h_0 S + \rho_0 g (H - h_0) S$, звідки можна знайти h_0:

$$h_0 = \frac{M_0 - \rho_0 HS}{S(\rho_в - \rho_0)} \approx 0{,}127\,м$$

Після посадки першого ступеня та нагрівання баржі умова набуде вигляду (нагріванням повітря іззовні знехтуємо): $(M_0 + M_R)g + (\rho - \rho_0) gHS = \rho_в ghS + \rho_0 g(H - h)S$.

Густину повітря всередині баржі після нагрівання можна знайти як: $\rho = \frac{m}{V} = \rho_0 \frac{T_0}{T} \approx 0{,}833 \frac{кг}{м^3}$.

Тоді глибина занурення після посадки першого ступеня буде рівною:

$$h = \frac{M_0 + M_R + (\rho - 2\rho_0)HS}{S(\rho_в - \rho_0)} \approx 0{,}134\,м$$