III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики
Київ, 28.01.2018
Можливі розв'язки
10 клас

1. Повноприводний автомобіль розганяється горизонтальною ділянкою шляху щоб піднятися крутим слизьким схилом (рис. 1). Яку швидкість υ_0 він повинен мати на початку підйому, щоб подолати схил? Яку потужність повинен розвивати двигун? Довжина схилу |AB| = 39 м, висота |BC| = 15 м коефіцієнт тертя коліс об поверхню схилу μ = 0,25, маса автомобіля m = 1200 кг·

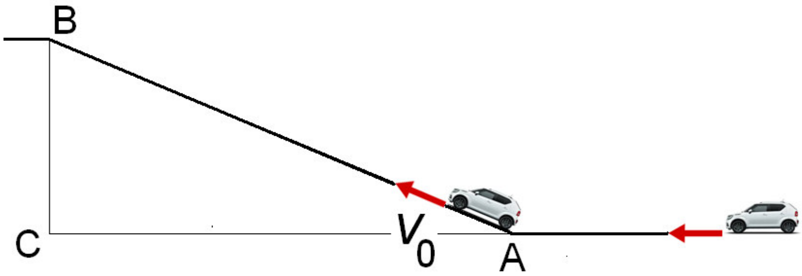


Рис. 1

1) Оцінюємо значення μ.

2) Для визначення напряму сили тертя знаходимо $tg\ \alpha\ \leq \mu$. Оскільки $tg\ \alpha = \frac{BC}{CA} > \mu$, то сила тертя спрямована вгору вздовж похилої площини.

3) Автомобіль долає схил за рахунок початкової кінетичної енергії та роботи сили зчеплення ведучих коліс із покриттям дороги (сили тертя). Позначимо $|\mathrm{AB}| = L$, $\angle \mathrm{CAB} = \alpha$. Умова подолання схилу:

$$\mu mgL\cos\alpha + \frac{mv_0^2}{2} \geq mgL\sin\alpha$$

Звідки:

$$v_0 \geq \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

4) Потужність двигуна P має бути достатньою для виконання роботи сили зчеплення при переміщенні із швидкістю v_0:

$$P \geq v_0 \mu mg\cos\alpha$$

5) Необхідно набрати швидкість приблизно *11 м/с*, при цьому двигун має розвивати потужність близько *30 кВт*.

2. Невелике тіло закріплене шарнірно в точці O на похилій площині за допомогою невагомого жорсткого стержня довжини $l = 60$ см *(рис. 2). Тіло може вільно обертатись навколо точки O, ковзаючи по поверхні площини, причому коефіцієнт тертя* $\mu = 1/3$. *Висота схилу площини* $|\mathrm{AC}| = 60$ см, *основа* $|\mathrm{BC}| = 30$ см.

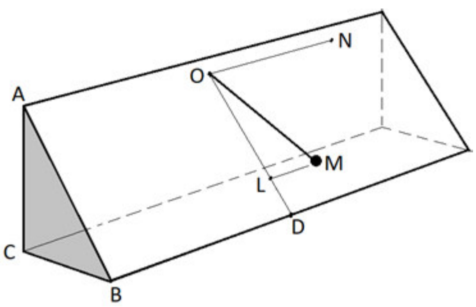


Рис. 2

На якій максимальній відстані $|\mathrm{LM}|$ *від лінії найкоротшого спуску* OD *можна встановити тіло, щоб воно залишилося нерухомим?*

Для визначення умови рівноваги скористаємось принципом віртуальної роботи (можливих переміщень). Оскільки під час ковзання тіла донизу площиною робота сили тертя виконується за рахунок запасу механічної енергії, то тіло, вміщене в точку *M*, зберігатиме стан спокою, якщо при повороті на малий кут навколо т. O робота сили тертя ΔA_f виявиться не меншою від зменшення потенціальної енергії тіла ΔE_p.

Позначимо $|\mathrm{LM}| = d$, $\angle \mathrm{ABC} = \beta$, $\angle \mathrm{MOL} = \gamma$. Робота сили тертя при повороті на малий кут $\Delta\gamma$ складе $\Delta A_f = \mu mgl\cos\beta \cdot \Delta\gamma$ (тут *m* – маса тіла). Потенціальна енергія відносно розташування вздовж OD складає $E_p = mgl\sin\beta(1-\cos\gamma)$. Тоді

$$\Delta E_p = E_p(\gamma) - E_p(\gamma - \Delta\gamma) = mgl\sin\beta\big(\cos(\gamma-\Delta\gamma) - \cos(\gamma)\big) = mgl\sin\beta\sin\gamma\cdot\Delta\gamma$$

Тоді з умови $\Delta E_p \le \Delta A_f$ випливає умова рівноваги:

$$\sin\gamma \le \mu\cot\beta$$

Таким чином $d_{\max} = l\sin\gamma_{\max} = \mu l\cot\beta = 10\,\text{см}$.

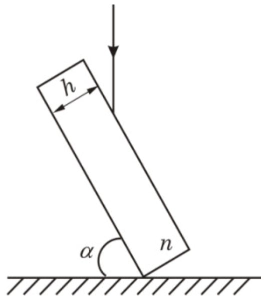


Рис. 3

3. Скляна пластинка товщиною h = 1 см з показником заломлення n = 1,73 закріплена так, що утворює кут α = 60° з горизонтальною поверхнею стола (рис. 3). На пластинку вертикально падає лазерний промінь і після кількох відбиттів у пластинці утворює на столі кілька світлих плям. Побудуйте хід променів і знайдіть відстань між плямами.

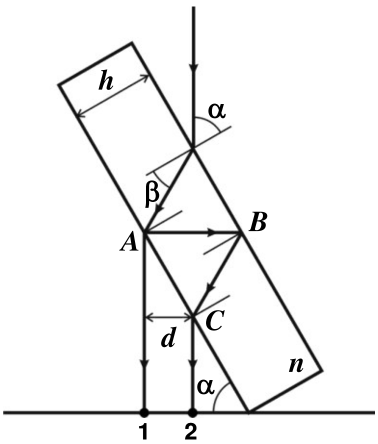


Рис. 4

Після однократного заломлення на обох гранях промінь виходить з пластинки в точці *A* паралельно падаючому променю (рис. 4) і дає на столі пляму (1). Після відбиттів у точках *A* і *B* промінь виходить з пластинки в точці *C* і дає на столі другу пляму (2). (При достатній довжині пластинки можливі подальші відбиття променя та утворення третього, четвертого тощо променів, що пройшли пластинку, але ми їх не розглядаємо).

Оскільки при відбиттях і заломленнях кути падіння на грані однакові, то всі промені, що падають на стіл, паралельні до падаючого. (Промені, що виходять з пластинки через праву грань, на розв'язок не впливають і на рисунку не показані). Відстань *d* між променями, що проходять крізь пластинку, а значить і шукані відстані між плямами на столі, знайдемо з рисунка:

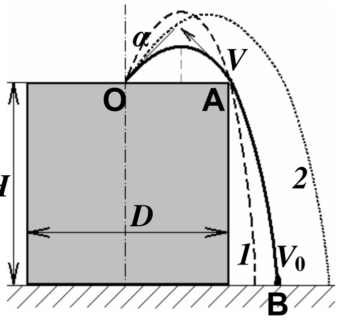
$$d = AC\ cos\alpha, \qquad AC = 2h \times tg\beta, \qquad tg\beta = \frac{sin\beta}{\sqrt{1 - sin^2\beta}}, \qquad sin\beta = \frac{sin\alpha}{n}$$

Звідки

$$d = \frac{nsin2\alpha}{\sqrt{n^2 - sin^2\alpha}} \approx 0{,}58\ \text{см}$$

4. Космічний корабель чужинців, сконструйований у формі циліндра висотою 100 м та діаметром 100 м, стоїть вертикально на поверхні Землі. Єдине вразливе місце корабля – маленький люк, що знаходиться в центрі верхньої основи, та лише в тому випадку, якщо снаряд потрапляє в нього зі швидкістю, не меншою за 20 м/с під кутом, не більшим за 45° від вертикалі (дані отримані з джерела, яке заслуговує повної довіри). У вас є маленька гармата, що знаходиться на рівні Землі. За якої мінімальної швидкості вильоту снаряду з жерла гармати можна знешкодити корабель? Стріляти можна під будь-яким кутом з довільної точки на поверхні Землі.

Спочатку розглянемо ділянку руху снаряду вище H - висоти корабля (рис.). Очевидно, що швидкість удару об люк буде рівною υ – швидкості прольоту висоти H, а мінімальна швидкість вильоту з землі буде при куті падіння α=45°. У такому випадку, швидкість υ визначається із рівності часів прольоту половини діаметра корабля (ділянки $\boldsymbol{OA}$) по горизонталі та під'йому-опусканню по вертикалі (до верхньої точки параболи):



$t_x \equiv \dfrac{D}{2\cdot V\cdot \sin\alpha} = t_{2y} \equiv \dfrac{2\cdot V\cdot\cos\alpha}{g}$, звідки $V^2 = \dfrac{D\cdot g}{2\cdot\sin 2\alpha}$ (при відомих α = 45° та $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$, можна отримати чисельне значення швидкості снаряда в точці A: $V \approx \sqrt{500} \approx 22{,}3$ *м/с*.

Значення початкової швидкості вильоту з гармати V_0 найпростіше визначити із закона збереження енергії: $\dfrac{mV_0^2}{2} = \dfrac{mV^2}{2} + mgH$, звідки отримаємо: $V_0 = \sqrt{\dfrac{Dg}{2\sin 2\alpha} + 2gH} \approx 50$ м/с, підставивши записаний вище вираз для швидкості υ^2.

5. Ділянка АВ електричного кола (рис. 5) складається з однакових резисторів і дротів, опір яких дуже малий. Опір цієї ділянки ланцюга дорівнює R_1 = 730 Ом. Після того, як школяр Вася перерізав один з дротів, опір ділянки АВ став дорівнювати R_2 = 1360 Ом. У яких точках Вася міг перерізати дріт? Вкажіть дві такі точки. Відповідь обґрунтуйте.

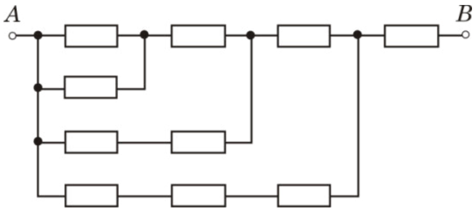


Рис. 5

Розглянемо ділянку AB електричного кола. Вона складається з послідовно і паралельно з'єднаних ділянок. Позначимо номерами резистори, як показано на рисунку 6. Позначимо опір кожного з резисторів через R, і визначимо через загальний опір цієї ділянки кола.

Резистори №№ 1, 5 з'єднані паралельно, їх загальний опір дорівнює *R/2*. Послідовно до них під'єднаний резистор № 2, що дає загальний опір *3R/2*. Далі до них паралельно під'єднані два послідовних резистора № № 6, 7. Враховуючи їх опір дорівнює $\frac{1{,}5\,R\cdot 2R}{1{,}5\,R+2R} = \frac{6}{7}\,R$. Додаючи послідовно з'єднаний резистор № 3, отримаємо опір *13R/7*. Далі паралельно до отриманої ділянки під'єднуються три послідовно ввімкнених резистора №№ 8, 9, 10, що дає:

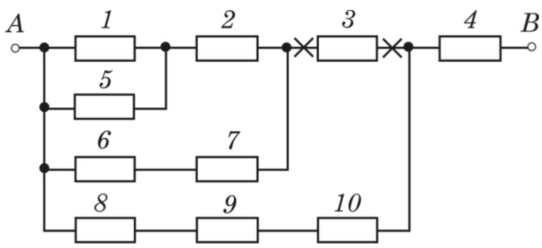


Рис. 6

$$\frac{(13R/7)\cdot 3R}{(13R/7)+3R}=\frac{39R}{34}.$$

Нарешті, шляхом послідовного під’єднання резистора № 4 отримаємо опір всієї ділянки кола:

$$R_{AB}=\frac{39R}{34}+R=\frac{73R}{34}=R_1$$

Згідно умови, він дорівнює $R_1 = 730$ *Ом*. Звідси $R = 340$ *Ом.*

Обчислимо відношення $\frac{R_2}{R}=\frac{1360}{340}=4$. Такий результат означає, що коло, яке отримується завдяки перерізанню дроту, еквівалентне чотирьом послідовно з'єднаним резисторам. Можна помітити, що резистори №№ 8, 9, 10, 4 будут з'єднані належним чином, якщо ізолювати одним відрізом всі інші резистори кола. Отже, Вася міг перерізати дріт біля резистора № 3 з кожного боку навколо нього.