III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики
Київ, 28.01.2018
Можливі розв'язки
11 клас

1. *Коефіцієнт заломлення атмосфери маленької, але дуже масивної планети зменшується з висотою h над її поверхнею від величини n_0 до 0 за лінійним законом. Знайдіть, на якій висоті над поверхнею планети знаходиться оптичний канал, по якому світлові промені будуть обходити планету, залишаючись на постійній висоті? Радіус планети R=100 км, коефіцієнт заломлення зменшується від $n_0 = 2$ біля поверхні до n = 1,5 на висоті h_0 = 100 км.*

На рисунку 1 показано поширення променя через вузький канал, який знаходиться на відстані h над поверхнею планети та має дуже малу товщину Δh. Світловий промінь зазнає повного внутрішнього відбиття на «зовнішній» поверхні розділу середовищ. Показник заломлення змінюється з висотою за законом: $\mathrm{n} = n_0 - \alpha \times h$, де $\alpha = 5 \times 10^{-6}\text{м}^{-1}$. Будемо вважати, що показник заломлення незмінний в усьому каналі, на зовнішній межі каналу він зменшується на величину $\Delta\mathrm{n} = \alpha \times \Delta h$.

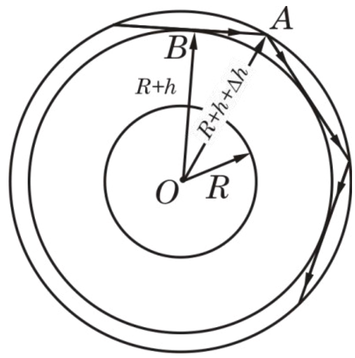

Рис. 1

Умова повного внутрішнього відбиття на межі каналу записується так:

$$n \times sin(\angle BAO) = n - \Delta\mathrm{n}$$

Враховуючи, що $sin(\angle BAO) = \frac{R+h}{R+h+\Delta h}$, можемо знайти

$$h = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2} = 150 \text{ км}$$

2. *Нагрівач повинен працювати в широкому діапазоні температур, при цьому опір його спіралі суттєво змінюється – від 16 до 25 Ом. Використовуючи лише резистори, придумайте та розрахуйте просту схему увімкнення нагрівача, щоб його потужність в усьому діапазоні температур була майже однаковою й складала 20 Вт з максимальною похибкою 1%.*

Потужність, що виділяється на зовнішній ділянці кола:

$$P = \frac{\mathrm{E}^2 R}{(R+r)^2}$$

Максимальною потужність нагрівача буде в тому випадку, якщо його опір дорівнюватиме внутрішньому опору джерела, при цьому струм в колі $I = \frac{E}{2r}$, максимальна потужність $P_{max} = \frac{E^2}{4r}$ (рис. 2). В районі максимуму потужність змінюється повільно, тому ідея полягатиме в тому, щоб в якості джерела взяти батарейку з послідовно під'єднаним опором, який відіграватиме роль внутрішнього опору джерела. Опір має бути між *16 Ом* та *25 Ом*. Висунемо вимогу, щоб потужність нагрівача у «крайніх» станах була однаковою – це й буде мінімальне значення потужності, максимальне значення буде отримане «посередині». Якщо *E* – напруга джерела (батарейки), його «внутрішній опір» *X*, тоді рівність потужностей при R_1 = *16 Ом* та R_2 = *25 Ом* запишеться так:

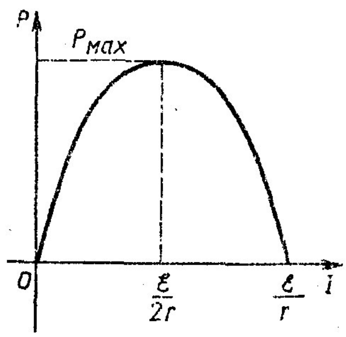

Рис. 1

$$\frac{E^2 R_1}{(R_1+X)^2} = \frac{E^2 R_2}{(R_2+X)^2}$$

Звідси отримаємо X=20 Ом. Знайдемо відношення максимальної та мінімальної потужностей:

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{20\ E^2/(20+20)^2}{16\ E^2/(16+20)^2} = \frac{81}{80}$$

Оскільки середнє значення потужності має становити 20 Вт, можемо записати наступне співвідношення:

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{20+\Delta P}{20-\Delta P} = \frac{81}{80}$$

Звідки знаходимо $\Delta P = 0{,}124$ Вт. Таким чином, максимальна потужність нагрівача складатиме $P_{max} = 20{,}124$ Вт, мінімальна – $P_{min} = 19{,}876$ Вт, тобто похибка становитиме 0,62%.

3. *В архіві лорда Кельвіна було знайдено уривок рукопису, на якому зображено замкнений цикл для 1 молю гелію в координатах (p,V) (рис. 3). Цикл складається з ізотерми 1-2, ізохори 2-3 та адіабати 3-1, ККД цього циклу 12,5 %. Масштаб по осі об'єму: 1 клітинка відповідає 0,5 л, масштаб по осі тиску: 1 клітинка відповідає 5 кПа. Знайдіть об'єм газу в ізохорному процесі.*

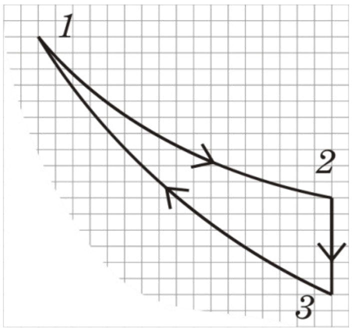

Рис. 3

За визначенням, ККД циклу дорівнює

$$\eta = \frac{A}{Q},$$

де A - робота газу за цикл, Q - отримана ним кількість теплоти. Для даного циклу

$$A = A_T + A_Q,$$

тут A_T - робота газу в ізотермічному процесі, A_Q - робота газу в адіабатному процесі.

Очевидно, що $Q = A_T$. Отже,

$$\eta = \frac{A}{A_T} = 1 + \frac{A_Q}{A_T} = 1 + \frac{A_Q}{A - A_Q},$$

звідки

$$A_Q = A\frac{\eta - 1}{\eta}.$$

Роботу, виконану газом за цикл, знайдемо як площу фігури, обмеженої лініями 1-2-3-1. Площа фігури складає 45 клітинок

$$1\text{од.} = 5 * 10^3\text{Па} \times 5 * 10^{-4}\text{м}^3 = 2{,}5\ \text{Дж}.$$

Отже, робота дорівнює ≈ 113 Дж.

Похибка чисельного визначення A при цьому не перевищує 5 од. Робота газу на ділянці адіабати становить:

$$A_Q = -C_V(T_1 - T_3) = -\frac{3}{2}R(T_2 - T_3) = -\frac{3}{2}V_2(p_2 - p_3)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}V_2(p_2 - p_3) = A\frac{\eta - 1}{\eta} \ \Rightarrow V_2 = \frac{1-\eta}{\eta}\frac{2A}{3(p_2 - p_3)}.$$

З рис. 3 визначаємо $P_2 - P_3$ = *6 клітинок* × *5 кПа* = $3{\cdot}10^4$ *Па.* Тому, шуканий об'єм

$$V_2 = \frac{0{,}875}{0{,}125} \times \frac{2\cdot 113}{3\cdot 3\cdot 10^4} \approx 17\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 = 17\ \text{л}.$$

4. *Три однакові однойменно заряджені кульки з зарядом q та масою m кожна, з'єднані нерозтяжними нитками, довжина кожної з яких l (рис. 4). Всі три кульки нерухомі й розташовані на гладенькій горизонтальній поверхні вздовж прямої. Якої мінімальної швидкості слід надати центральній кульці, щоб в процесі подальшого руху кульки могли утворити рівносторонній трикутник? Радіус кульок вважати малим порівняно з довжиною нитки l.*

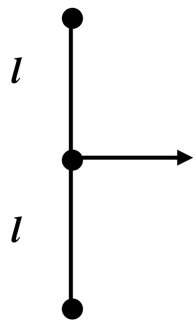

Рис. 4

Згідно закону збереження імпульсу, швидкість центра мас системи

$$v_{\text{ц.м.}} - const.$$

На початку $v_{\text{ц.м.1}} = \frac{mv}{3m} = \frac{v}{3}$.

Після встановлення стаціонарного режиму руху швидкість кульок буде однаковою ($v_1 = v_2 = v_3$), тому

$$\overrightarrow{v_{\text{ц.м.2}}} = \frac{1}{3m}(m\overrightarrow{v_1} + m\overrightarrow{v_2} + m\overrightarrow{v_3}) = \frac{m}{3m}(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1}.$$

Кожна кулька рухається зі швидкістю $v_1 = {}^{v}\!/_{3}$. Згідно закону збереження енергії

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{2}\frac{q^2}{l} + \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{l} + 3\,\frac{m\left({}^{v}\!/_{3}\right)^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{3}{8}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 ml} \Rightarrow v = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi\varepsilon_0 ml}}.$$

5. *Невелике тіло закріплене шарнірно в точці O на похилій площині за допомогою невагомого жорсткого стержня довжини* $l = 60\,\text{см}$ *(рис. 27). Тіло може вільно обертатись навколо точки O, ковзаючи по поверхні площини, причому коефіцієнт тертя* $\mu = {}^{1}\!/_{3}$. *Висота схилу площини* $|\text{AC}| = 60\,\text{см}$, *основа* $|\text{BC}| = 30\,\text{см}$.

   1) *На якій максимальній відстані* $|\text{LM}|$ *від лінії найкоротшого спуску* OD *можна встановити тіло, щоб воно залишилося нерухомим?*
   2) *Тіло встановлюють паралельно схилу у позицію N і відпускають. Оцініть шлях S, що пройде тіло до зупинки, та вкажіть похибку, з якою виконана оцінка.*

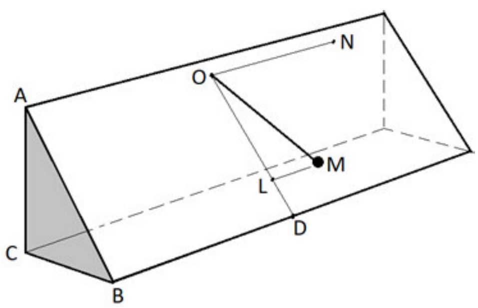

Рис. 27

1) Для визначення умови рівноваги скористаємось принципом віртуальної роботи (можливих переміщень). Оскільки під час ковзання тіла донизу площиною робота сили тертя виконується за рахунок запасу механічної енергії, то тіло, вміщене в точку *M*, зберігатиме стан спокою, якщо при повороті на малий кут навколо т. O робота сили тертя ΔA_f виявиться не меншою від зменшення потенціальної енергії тіла ΔE_p.

Позначимо $|\text{LM}| = d$, $\angle\text{ABC} = \beta$, $\angle\text{MOL} = \gamma$. Робота сили тертя при повороті на малий кут $\Delta\gamma$ складе $\Delta A_f = \mu mgl\cos\beta\cdot\Delta\gamma$ (тут m – маса тіла). Потенціальна енергія відносно розташування вздовж OD складає $E_p = mgl\sin\beta(1-\cos\gamma)$. Тоді

$$\Delta E_p = E_p(\gamma) - E_p(\gamma-\Delta\gamma) = mgl\sin\beta\left(\cos(\gamma-\Delta\gamma) - \cos(\gamma)\right) = mgl\sin\beta\sin\gamma\cdot\Delta\gamma$$

Тоді з умови $\Delta E_p \le \Delta A_f$ випливає умова рівноваги:

$$\sin\gamma \le \mu\cot\beta$$

Таким чином $d_{\max} = l\sin\gamma_{\max} = \mu l\cot\beta = 10\,\text{см}$.

2) В процесі ковзання із т. N до повної зупинки сила тертя виконає роботу:

$$A_f = \mu mg\cos\beta \cdot S = mgl\sin\beta - E_{p,\mathrm{M}}$$

Тому

$$mgl\sin\beta\cos\gamma_{\max} \le \mu mg\cos\beta \cdot S \le mgl\sin\beta$$

$$l\cos\gamma_{\max} \le \mu\cos\beta \cdot S \le l$$

$$l^2\left(1 - \mu^2\cot^2\beta\right)\frac{\tan^2\beta}{\mu^2} \le S^2 \le l^2\frac{\tan^2\beta}{\mu^2}$$

$$l\sqrt{\frac{\tan^2\beta}{\mu^2} - 1} \le S \le l\frac{\tan\beta}{\mu}$$

Потенціальна енергія в т. M, в якій тіло зупиниться, задовольняє умові:

$$0 \le E_{p,\mathrm{M}} \le mgl\sin\beta\left(1 - \cos\gamma_{\max}\right)$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$l\sqrt{35} \le S \le 6l$$

$$5.9l < S \le 6l$$

Звідки $S = 5.95l \pm 0.05l = 357 \pm 3\,\text{см}$.