

Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики

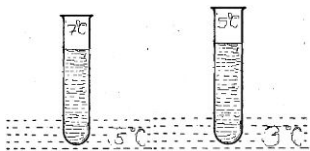
м. Львів, 2017 рік

10 клас

Задача 1 (5 балів): Шматок сплаву цинку і міді масою 5,16 кг у воді важить 45,6 Н. Скільки цинку містить сплав? Яка густина сплаву? (Густина міді становить $8,9 \text{ г/см}^3$, густина цинку $-7,1 \text{ г/см}^3$, води -1 г/см^3 , $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.)

Задача 2 (5 балів): Автомобіль рухався зі швидкістю v_0 . Далі він почав рухатися зі сталим по модулю прискоренням протягом часу τ . Визначити найменший шлях, який може пройти автомобіль за цей час.

Задача 3 (5 балів): У дві посудини великого об'єму наповнені водою занурюють дві однакові пробірки з рівними масами води так, що пробірки лише торкаються дном до поверхні рідини. Температура 1-ої посудини рівна 5°C , а 1-ої пробірки -7°C , температура 2-ої посудини становить 3°C , а 2-ої пробірки -5°C . Вказати механізм теплопередачі в обох випадках і порівняти швидкості теплообміну. Теплообміном з навколишнім середовищем знехтувати.



Задача 4 (5 балів): Кулька масою m горизонтально влітає в дошку товщиною d і продовжує в ній рух. Швидкість кульки в момент зіткнення з дошкою становила v_0 . Сила тертя між кулькою і дошкою пропорційна до швидкості кульки і змінюється за законом: $F_T = -kv$, де k – постійна додатна величина, що залежить від властивостей дерева і розмірів кулі. Знайти швидкість кульки як функцію пройденого шляху x в дошці, а також коефіцієнт пропорційності k , якщо відомо що кулька пройшла всю дошку, але не вийшла з неї.

Задача 5 (5 балів): Нагрівник ввімкнений в мережу через послідовно з'єднаний з ним реостат. Максимальний опір реостата 30 Ом. Якщо опір нагрівника 90 Ом, то при повністю введеному реостаті вода закипає за 8 хв. При якому опорі нагрівника та сама кількість води закипить за 4 хв, якщо реостат увімкнений наполовину? Втратами теплоти знехтувати.

РОВ'ЯЗКИ

Задача 1 (5 балів): Шматок сплаву цинку і міді масою 5,16 кг у воді важить 45,6 Н. Скільки цинку містить сплав? Яка густина сплаву?

Розв'язання

$F_a = P - P_g$ – виштовхувальна сила, що діє на сплав у воді

$$F_a = 6 \text{ Н}$$

$$F_a = g \rho_g V V = \frac{F_a}{g \rho} = 0,0006 \text{ м}^3 = 600 \text{ см}^3 - \text{об'єм сплаву}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = 8600 \text{ кг/м}^3$$

Складаємо систему рівнянь

$$m = m_M + m_{Ц}$$

$$V = V_M + V_{Ц}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\frac{m_M}{\rho_M} = V - \frac{m_{Ц}}{\rho_{Ц}}$$

$$\frac{m_M}{\rho_M} = \frac{\rho_{Ц} V - m_{Ц}}{\rho_{Ц}}$$

після перетворень отримаємо

$$m_M \rho_{Ц} = \rho_M V \rho_{Ц} - m_{Ц} \rho_M$$

$$m_M = m - m_{Ц}$$

$$m \rho_{Ц} - m_{Ц} \rho_{Ц} = V \rho_M \rho_{Ц} - m_{Ц} \rho_M$$

Згрупувавши подібні, отримаємо

$$m_{Ц} (\rho_M - \rho_{Ц}) = \rho_{Ц} (\rho_M V - m)$$

Звідси маса цинку

$$m_{Ц} = \rho_{Ц} \frac{\rho_M V - m}{\rho_M - \rho_{Ц}} = 0,71 \text{ кг}$$

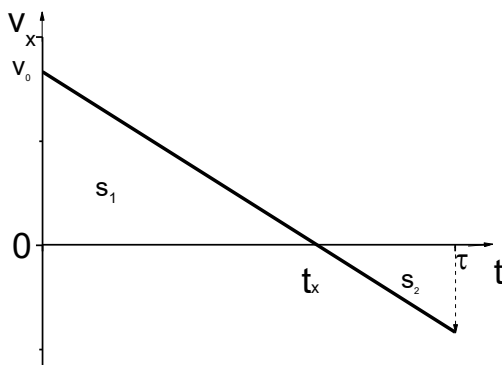
Відповідь. $m_{Ц} = 0,71 \text{ кг}$, $\rho = 8600 \text{ кг/м}^3$

Задача 2 (5 балів): Автомобіль рухався зі швидкістю v_0 . Далі він почав рухатися зі сталим по модулю прискоренням протягом часу τ . Визначити найменший шлях, який може пройти автомобіль за цей час.

Розв'язання

У даній задачі не до кінця зрозуміло як саме рухався автомобіль. Можливі різні варіанти. Розглянемо їх, виходячи з умови найменшого шляху.

- 1) **Автомобіль розганявся зі сталим прискоренням протягом часу τ .** Тоді на графіку залежності швидкості від часу ми отримаємо прямокутну трапецію, площа якої буде шуканим шляхом. Отже, такий варіант відкидаємо.
- 2) **Автомобіль рухався з нульовим прискоренням протягом часу τ .** В цьому разі шлях буде рівний площі прямокутника. Цей варіант також не підходить, бо можливі інші способи руху, де площа буде меншою
- 3) **Автомобіль гальмував протягом часу τ .** Такий рух вже може розглядатись. Це найменша з усіх розглянутих вище площ.
- 4) **Автомобіль спочатку гальмував, а потім здійснив поворот і почав розганятись з тим самим прискоренням.** Такий варіант може бути розв'язком задачі лише при певному значенні t_x , підбираючи яке, площа під графіком швидкості буде найменшою.



Як бачимо з графіка, мінімальна площа буде у випадку, коли автомобіль спочатку рухався рівносповільнено протягом часу t_x , а далі – рівноприскорено з тим самим за модулем прискоренням протягом часу $(\tau - t_x)$ так, щоб весь час руху був рівний τ . Запишемо рівняння для шляху. З графіка видно, що $s = s_1 + s_2$.

Отже,

$$s = v_0 t_x - \frac{1}{2} a t_x^2 + \frac{1}{2} a (\tau - t_x)^2 \quad (1)$$

Модуль прискорення

$$a = \frac{v_0}{t_x} \quad (2)$$

Врахувавши (2), рівняння для шляху переписеться наступним чином

$$s = \frac{1}{2}v_0 t_x + \frac{1}{2t_x} v_0 (\tau - t_x)^2 \quad (3)$$

Маємо квадратне рівняння відносно t_x . Після перетворень отримаємо (4).

$$t_x^2 - \left(\tau + \frac{2s}{v_0}\right)t_x + \frac{1}{2}\tau^2 = 0 \quad (4)$$

Шукаємо дискримінант даного рівняння

$$D = \left(\tau + \frac{2s}{v_0}\right)^2 - 2\tau^2 \quad (5)$$

У (5) входить найменший шлях. Отже, його можна знайти без подальшого розв'язування квадратного рівняння (4). Оскільки шлях – величина завжди додатна, то умовою найменшого шляху в даній задачі буде $D = 0$. Отже,

$$D = \left(\tau + \frac{2s}{v_0}\right)^2 - 2\tau^2 = 0$$

$$\left[\left(\tau + \frac{2s}{v_0}\right) - \sqrt{2}\tau\right]\left[\left(\tau + \frac{2s}{v_0}\right) + \sqrt{2}\tau\right] = 0 \quad (6)$$

Тоді

$$\tau + \frac{2s}{v_0} - \sqrt{2}\tau = 0 \quad (7)$$

Отже,

$$s = (\sqrt{2}-1)v_0\tau \quad (8)$$

Відповідь. $s = (\sqrt{2}-1)v_0\tau$

Задача 3 (5 балів): У дві посудини великого об'єму наповнені водою занурюють дві однакові пробірки з рівними масами водитак, що пробірки лише торкаються дном до поверхні рідини. Температура 1-ої посудини рівна 5°C , а 1-ої пробірки – 7°C , температура 2-ої посудини становить 3°C , а 2-ої пробірки – 5°C . Вказати механізм теплопередачі в обох випадках і порівняти швидкості теплообміну.

Розв'язання

Оскільки об'єм посудин набагато більший за об'єми пробірок, то температура води в посудинах не зміниться.

Між першою пробіркою (7°C) та першою посудиною (5°C) теплопередача буде здійснюватися шляхом **теплопровідності** допоки температура не стане рівною 5°C .

Між другою пробіркою (5°C) та другою посудиною (3 °C) до 4 °C теплообмін буде здійснюватись так само як і в першому випадку. При досягненні температури в пробірці 4 °C, через особливості води в ній, крім теплопровідності, тепло буде передаватись між шарами ще й внаслідок **конвекції**.

Отже, у другому випадку теплопередача відбудеться швидше.

Задача 4 (5 балів): Кулька масою m горизонтально влітає в дошку товщиною d і продовжує в ній рух. Швидкість кульки в момент зіткнення з дошкою становила v_0 . Сила тертя між кулькою і дошкою пропорційна до швидкості кульки і змінюється за законом: $F_T = -kv$, де k – постійна додатна величина, що залежить від властивостей дерева і розмірів кулі. Знайти швидкість кульки як функцію пройденого шляху x в дошці, а також коефіцієнт пропорційності k , якщо відомо що кулька пройшла всю дошку, але не вийшла з неї.

Розв'язання

Запишемо скалярне рівняння руху кульки в дошці

$$ma = -kv \quad (1)$$

Оскільки рух відбувається під дією змінної сили, то потрібно ввести поняття миттєвого прискорення і миттєвої швидкості

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2)$$

$$де \Delta v = v(x) - v_0 \Delta x = x - 0 = x \quad (3)$$

причому Δv , Δx мають бути якомога меншими, щоб отримати точний розв'язок. Тоді II закон Ньютона (1), враховуючи (2), переписеться наступним чином:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -k \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4)$$

Через те, що зміна швидкості відбувається в той самий проміжок часу Δt , що й зміна координати, то рівняння (4) запишеться так:

$$m \Delta v = -kx \quad (5)$$

За умовою задачі кулька зупинилась ($v(d) = 0$), пройшовши всю товщину дошки d . Тоді, врахувавши (3), запишемо

$$mv_0 = kd \quad (6)$$

З (6) визначимо коефіцієнт пропорційності

$$k = \frac{mv_0}{d} \quad (7)$$

Повертаючись до рівняння (3), а також використовуючи значення коефіцієнта k , знайдемо залежність швидкості від координати

$$\Delta v = -\frac{kx}{m}; v(x) - v_0 = -\frac{v_0 x}{d}. \text{ Отже,}$$

$$v(x) = v_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \quad (8)$$

Задача 5 (5 балів): Нагрівник увімкнений в мережу через послідовно з'єднаний з ним реостат. Максимальний опір реостата 30 Ом. Якщо опір нагрівника 90 Ом, то при повністю введеному реостаті вода закипає за 8 хв. При якому опорі нагрівника та сама кількість води закипить за 4 хв, якщо реостат увімкнений наполовину? Втратами теплоти знехтувати.

Розв'язання

Запишемо кількість теплоти, яка потрібна для нагрівання води у двох випадках:

$$Q_1 = U^2 \frac{r t_1}{(R+r)^2}$$

$$Q_2 = U^2 \frac{r_2 t_2}{\left(\frac{1}{2}R + r_2\right)^2}$$

Так як потрібно нагріти однакову кількість води у двох випадках, то $Q_1 = Q_2$. Прирівнявши і згрупувавши множники, отримаємо наступну рівність

$$r t_1 \left(\frac{1}{2}R + r_x\right)^2 = r_x t_2 (R+r)^2$$

Маємо квадратне рівняння відносно r_x . Для спрощення підставимо числові значення. Отримаємо таке:

$$r_x^2 - 50r_x + 225 = 0$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо: $r_x = 5$ Ом, $r_x = 45$ Ом

Бачимо, що обидва корені задовольняють умову задачі.

Відповідь. $r_x = 5$ Ом $r_x = 45$ Ом