Обласна олімпіада з фізики для школярів

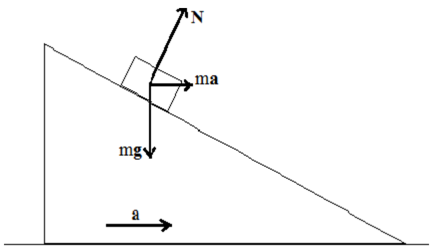
11 клас. Розв'язки

17 лютого 2018 р, м. Львів

1. На брусок, який знаходиться на похилій площині діють сила тяжіння $m\mathbf{g}$, сила реакції опори $\mathbf{N}$ та сила третя $\mathbf{F}_T$. Якщо площина нерухома, або рухається рівномірно і прямолінійно, то записавши рівняння руху:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_T \tag{1}$$

та спроектувавши вектори на осі перпендикулярну та вздовж похилої площини знайдемо, що брусок зісковзуватиме із похилої площини за умови $\mu < \tan\alpha$.



Тепер розглянемо випадок, коли площина рухається із горизонтальним прискоренням (як показано на малюнку). Брусок буде зазнавати впливу тих же ж сил, що і в попередньому випадку, однак він матиме деяке горизонтальне прискорення a_1. Щоб визначити це прискорення запишемо рівняння руху:

$$ma_1 \cos\alpha = mg\sin\alpha - \mu N; \quad ma_1 \sin\alpha = N - mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Звідки отримуємо, що:

$$a_1 = g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \tag{3}$$

Якщо прискорення площини $a < a_1$ то брусок буде зісковзувати вниз. Таким чином для того щоб, брусок не зісковзував із похилої площини її прискорення має задовольняти умові $a \geqslant a_1$. Однак при подальшому зростанні прискорення похилої площини у певний момент брусок починає ковзати вгору. В цей момент сила тертя змінить свій напрямок і буде протидіяти ковзанню бруска вгору. Знову запишемо рівняння руху:

$$ma_2 \cos\alpha = mg\sin\alpha + \mu N, \quad ma_2 \sin\alpha = N - mg\cos\alpha. \tag{4}$$

Звідки отримуємо, що:

$$a_2 = g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}. \tag{5}$$

Якщо прискорення площини перевищує отримане нами прискорення a_2 ($a > a_2$), то брусок буде ковзати вгору. Зауважимо, що за умови, коли $\mu = \cot\alpha$ знаменник виразу (5) розбігається, а це означає, що брусок не ковзатиме вгору при умові $\mu \geqslant \cot\alpha$ при довільному прискоренні.

Таким чином брусок буде залишатися у стані спокою, якщо прискорення площини задовільнятиме умовам:

$$g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \leqslant a \leqslant g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}, \quad \mu < \cot\alpha; \tag{6}$$

$$g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \leqslant a < \infty, \quad \mu \geqslant \cot\alpha \tag{7}$$

2. Запишемо рівняння стану для для обох частин посудини за наявності перегородки:

$$\left(\frac{mg}{S} + p_0\right) Sh = \nu_1 RT, \quad pSh = \nu_2 RT, \tag{8}$$

із написаних рівнянь легко отримуємо вирази для кількостей речовини (газу) у одній та іншій частинах посудини:

$$\nu_1 = \left(\frac{mg}{S} + p_0\right)\frac{Sh}{RT}, \quad \nu_2 = \frac{pSh}{RT}. \tag{9}$$

Після відкривання перегородки та встановлення рівноваги можемо записати рівняння стану для усієї посудини

$$\left(\frac{mg}{S} + p_0\right) S(2h + \Delta h) = (\nu_1 + \nu_2)RT_1, \tag{10}$$

тут Δh — зміщення поршня, а T_1 – температура газу після встановлення рівноваги. При переміщенні поршня газ виконує роботу (або робота виконується над газом), яка рівна зміні внутрішньої енергії газу:

$$\left(\frac{mg}{S} + p_0\right) S\Delta h = c(\nu_1 + \nu_2)(T - T_1). \tag{11}$$

Із останніх двох рівнянь знаходимо:

$$\Delta h = \frac{ch}{c+R}\left(\frac{p}{mg/S + p_0} - 1\right) \tag{12}$$

Зауважимо, що отримане співвідношення справджується як у випадку, коли газ виконує роботу по переміщенню поршня, а саме коли $p > mg/S + p_0$ (тиск у нижній частині посудини до відкривання перегородки більший ніж у верхній), тоді $\Delta h > 0$, так і у випадку коли робота буде виконуватися над газом ($p < mg/S + p_0$), у цьому випадку $\Delta h < 0$.

3. Запишемо закони збереження заряду для обкладок конденсаторів до і після з'єднання:

$$q_2 - q_1 = {q'}_2 - {q'}_1, \quad q_3 - q_2 = {q'}_3 - {q'}_2, \quad q_4 - q_3 = {q'}_4 - {q'}_3, \tag{13}$$

де ${q'}_i$, ($i = 1, 2, 3, 4$) позначають заряди на обкладках відповідних конденсаторів після замикання усіх ключів. Зрозуміло, що після замикання ключів та перерозподілу зарядів струм у даному замкнутому контурі протікати не буде, а це означає, що сума всіх потенціалів на обкладках конденсаторів рівна нулю:

$$\frac{{q'}_1}{C}+\frac{{q'}_2}{C}+\frac{{q'}_3}{C}+\frac{{q'}_4}{C}=0 \Leftrightarrow {q'}_1+{q'}_2+{q'}_3+{q'}_4=0 \tag{14}$$

Розв'язавши систему рівнянь (13) та (14) одержимо:

$${q'}_1=\frac{1}{4}\left(3q_1-q_2-q_3-q_4\right), \quad {q'}_2=\frac{1}{4}\left(3q_2-q_1-q_3-q_4\right), \tag{15}$$

$${q'}_3=\frac{1}{4}\left(3q_3-q_1-q_2-q_4\right), \quad {q'}_4=\frac{1}{4}\left(3q_4-q_1-q_2-q_3\right). \tag{16}$$

4. У рамці, яку відпустили буде виникати Е.Р.С. індукції внаслідок перетину рамкою ліній магнітної індукції.

$$\mathcal{E}_{ind}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-\frac{Bav\Delta t}{\Delta t}=-Bav, \tag{17}$$

тут v — швидкість рамки у певний момент часу.

При протіканні струму у рамці на неї буде діяти сила Ампера. Запишемо вираз для сили Ампера, що діє на одну із сторін рамки (наприклад на верхню сторону):

$$F_A=IaB=\frac{\mathcal{E}_{ind}}{R}aB=-\frac{B^2a^2}{R}v \tag{18}$$

Скориставшись правилом визначення напрямку сили Ампера бачимо, що на вертикальні сторони рамки діють горизонтальні сили, рівні за величиною і протилежні за напрямком, а отже, вони компенсують одна одну а це означає, що будь-яке зміщення по горизонталі під час падіння відсутнє. Що стосується напрямку сили Ампера, яка діє на горизонтальні сторони рамки, то на верхню сторону рамки буде діяти сила спрямована вгору, а на нижню – вниз. Це означає, що під час падіння рамки, коли вона знаходиться повністю в області між полюсами електромагніта, сумарна сила Ампера, яка діє на рамку є рівною нулю, а отже рамка буде вільно падати. (В даному випадку сила Ампера буде приводити виключно до розтягу рамки, однак ми цією деформацією нехтуємо). Якщо ж нижня сторона рамки виходить за межі області де локалізоване поле (за межі електромагніта), то сила Ампера діятиме на бічні (дію на які ми вже з'ясували) та верхню сторони. Від цього моменту сила Ампера буде зменшувати прискорення рамки, а отже, сповільнюватиметься і зростання швидкості. Запишемо рівняння руху рамки для цього моменту:

$$ma=mg+F_A=mg-\frac{B^2a^2}{R}v \tag{19}$$

Дане рівняння дає змогу встановити залежність швидкості від часу, однак зрозуміло, що зростання швидкості припиниться, коли сумарна сила, яка діятиме на рамку буде рівною нулю, звідси отримаємо співвідношення:

$$mg=\frac{B^2a^2}{R}v \quad \Rightarrow \quad v=\frac{mgR}{a^2B^2} \tag{20}$$

Даний вираз можна отримати і з енергетичних міркувань, а саме при падінні рамки, потенціальна енергія переходить у кінетичну та у виділення джоулевого тепла. Зрозуміло, що при зростанні швидкості, зростає і кількість виділеного тепла, припустимо, що певний момент часу зміна потенціальної енергії рамки ΔU_g рівна кількості виділеного тепла ΔQ:

$$\Delta U_g = \Delta Q. \tag{21}$$

Остання рівність означає, що зміна кінетичної енергії рамки рівна нулю $\Delta E_K = 0$. Із рівняння (21) отримуємо:

$$mg\Delta h \equiv mgv\Delta t = I^2 R\Delta t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mgR}{a^2B^2}. \tag{22}$$

Зрозуміло, що для досягнення встановленої швидкості падіння повинні виконуватися певні умови, а саме, довжина сторони рамки має бути не меншою ніж добуток встановленої швидкості на характерний проміжок часу (коли відбувається помітна зміна швидкості), який можна трактувати як час протягом якого досягається встановлена щвидкість:

$$a \gtrsim v\tau, \tag{23}$$

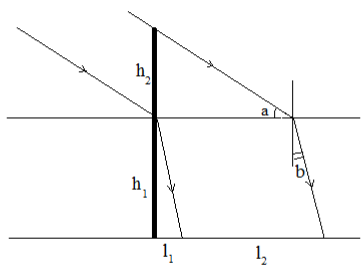
де τ — згаданий вище характерний проміжок часу. Час τ можна отримати із рівняння руху (19), для цього перепришемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{B^2a^2}{mR}(u - v) = -\frac{u - v}{\tau}, \tag{24}$$

тут $u = u(t)$ — швидкість, як функція часу, а $\tau = \frac{mR}{B^2a^2}$. Тепер повернувшись до співвдношення (23) отримаємо:

$$a \gtrsim \frac{m^2gR^2}{B^4a^4}, \quad \Leftrightarrow \quad a^5 \gtrsim \frac{m^2gR^2}{B^4}. \tag{25}$$

5. Довжину тіні, яку відкидає верхня частина стовпа (та що виступає над поверхнею води) можна легко знайти із геометричних міркувань (див. рисунок):



$$l_2 = \frac{h_2}{\tan\alpha} \tag{26}$$

Підставивши числа, одержуємо $l_2 = \sqrt{3} \approx 1.73$(м).

Щоб знайти довжину тіні на дні ріки, знайдемо кут заломлення променів світла при переході із повітря у воду:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\beta}=n, \quad \Rightarrow \quad \sin\beta=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{n}=\frac{\cos\alpha}{n}. \tag{27}$$

Отримавши кут заломлення β можемо знайти довжину підводної частини стовпа на дні річки l_1:

$$l_1=h_1\tan\beta=h_1\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}}. \tag{28}$$

Підставивши числові значення отримаємо: $l_1 \approx 1.57$(м). Загальна довжина тіні буде сумою довжин тіней від надводної та підводної частин:

$$L=l_1+l_2\approx 3.3(m) \tag{29}$$