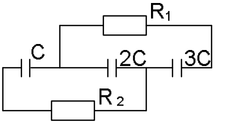
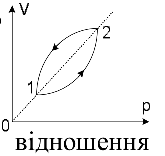
10 клас

1. Автомобіль скочується з вимкненим двигуном і постійною швидкістю υ з гірки, кут нахилу якої дорівнює α . Відстань між осями коліс автомобіля L, а його центр мас знаходиться посередині між осями на висоті h над дорогою. Вважаючи силу тертя кочення прямо пропорційною навантаженню на вісь, визначити гальмівний шлях автомобіля після раптового гальмування з повним блокуванням задніх коліс, коефіцієнт тертя ковзання яких по дорозі дорівнює k.

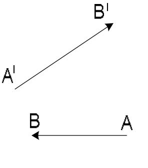
2. Стінки циркового льодового майданчика мають форму кола радіуса r = 7 м. Клоун - хокеїст б’є по шайбі і надає їй поступального руху в напрямку протилежної стінки майданчика. Шайба перетинає майданчик на відстані d_0= 4 м від його центру, після удару відскакує від стінки, знову перетинає майданчик, знову відбивається, і так багато разів. Визначити, на якій відстані d від центру майданчика буде проходити шайба після великої кількості відбиттів. Шайбу вважати однорідним диском. Тертям об лід знехтувати. Вважати, що при ударі шайби об стінку нормальна складова швидкості не змінюється за величиною.



3. Три конденсатори ємностями C, 2C і 3C з’єднані послідовно і приєднані до джерела е.р.с. ε = 30 В. Після зарядки конденсаторів їх відключили від джерела і одночасно до них приєднали два резистори так, як показано на рисунку. Яка кількість теплоти виділиться на резисторах, якщо C = 3 мкФ.

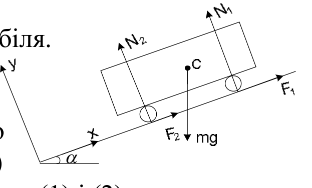


4. Як робоче тіло в тепловій машині використовується постійна маса ідеального одноатомного газу, зміну стану якого зображено на pV - діаграмі. При належному виборі масштабів по осях цієї діаграми цикл зображається двома чвертями кіл, причому точки перетину дуг 1 і 2 лежать на бісектрисі кута, утвореного осями діаграми. Визначити ККД циклу, якщо відношення максимального і мінімального об’ємів газу в цьому циклі дорівнює n = 3.



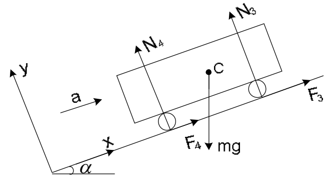
5. На рисунку показано предмет AB і його зображення A^1B^1, одержане в лінзі. Визначити побудовою розміщення лінзи і її головних фокусів.

10 клас

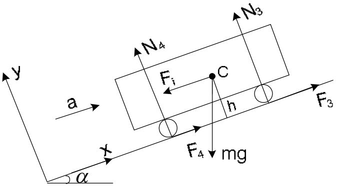


Задача 1. 1. Розглянемо рівномірний рух автомобіля. Зобразивши сили, що діють на автомобіль (F_1, F_2 – сили тертя кочення; N_1, N_2 – сили нормальної реакції опори), запишемо умову його рівномірного руху. ОУ: $mg\cos\alpha = N_1+N_2$ (1)
OX: $mg\sin\alpha = F_1+F_2=\mu N_1+\mu N_2$ (2). Враховуючи (1) і (2), отримаємо:

$\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$ (3), μ – коефіцієнт тертя кочення.

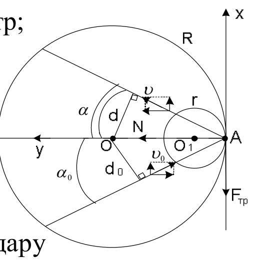


2. Розглянемо гальмування автомобіля.
Запишемо другий закон Ньютона:
ОУ: $N_3+N_4 = mg\cos\alpha$ (4);
ОХ: $ma = F_3+F_4 - mg\sin\alpha$ (5).
Враховуючи (1) і (2), отримаємо:
$ma = kN_3 + \mu N_4 - \mu(N_1+N_2) = kN_3 + \mu N_4 - \mu(N_3+N_4) = (k - \mu)N_3$. (6).
Оскільки автомобіль гальмує: $a_x = a > 0$. Враховуючи рівняння (6), отримаємо умову гальмування $k > \mu = \mathrm{tg}\,\alpha$ (7).



3. Розглянемо автомобіль в неінерціальній системі відліку (СВ), що рухається разом з автомобілем. В цій СВ автомобіль нерухомий (F_i – сила інерції). Запишемо умову рівноваги.
ОУ: $N_3+N_4 = mg\cos\alpha$ (8).
вісь С: $(kN_3 + \mu N_4)h+N_3L/2 = N_4L/2$ (9).

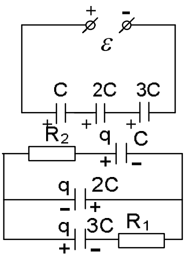
З рівняння (9) отримаємо: $N_3 = \dfrac{N_4(L-2\mu h)}{L+2kh}$. Оскільки автомобіль гальмує не перекидаючись $N_3 > 0$, отримаємо умову на параметри автомобіля
$L > 2\mu h = 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (10). Розв'язавши рівняння (8) і (9), отримаємо:
$N_3 = \dfrac{mg\cos\alpha\,(L-2\mu h)}{2(L+h(k-\mu))}$ (11). Враховуючи рівняння (6), визначимо прискорення автомобіля: $a = \dfrac{(k-\mu)(L-2\mu h)g\cos\alpha}{2(L+h(k-\mu))}$ (12). Тоді при умовах (7) і (10) гальмівний шлях автомобіля : $S = \dfrac{\upsilon^2}{2a} = \dfrac{\upsilon^2(L+h(k-\mu))}{g\cos\alpha(k-\mu)(L-2\mu h)}$ ($\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$).



Задача 2. Нехай: *R* – радіус майданчика, *O* – його центр; *r* – радіус шайби, *O₁* – її центр, *m* – її маса. При стиканні зі стінкою складова швидкості шайби вздовж осі АХ зменшується, доки не зникне тертя. Тертя зникає за умови, що шайба при ударі „котиться" вздовж борта без проковзування $\upsilon_x = \upsilon\sin\alpha = \omega r$ (1).
Будемо вважати, що тертя зникає вже після першого удару, оскільки кількість ударів нас не цікавить. Для удару запишемо другий закон Ньютона (Δt – час удару, N – середня сила нормальної реакції опори, $F_{тр}$ – середня сила тертя).
АУ: $N\Delta t = (\upsilon\cos\alpha + \upsilon_0\cos\alpha_0)m$ (2);

АХ: $F_{тр}\Delta t = (\upsilon_0 \sin\alpha_0 - \upsilon \sin\alpha)m$ (3); і закон динаміки обертального руху відносно осі O_1. $r\,F_{тр}\,\Delta t = I\,\omega$ (4). $I = m\,r^2$ (5) – момент інерції шайби відносно осі O_1. Розв’язуючи рівняння (1) – (5) і враховуючи що $\upsilon_0 \cos\alpha_0 = \upsilon\cos\alpha$ (за умовою задачі), отримаємо: $2\mathrm{tg}\,\alpha_0 = 3\mathrm{tg}\,\alpha$ (6). Далі з геометричних міркувань отримаємо:

$$\frac{2d_0}{\sqrt{R^2 - d_0^2}} = \frac{3d}{\sqrt{R^2 - d^2}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4d_0^2 R^2}{9R^2 - 5d_0^2}} = 3м.$$

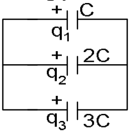


Задача 3. Визначимо загальну ємність ділянки (C_x), заряд кожного конденсатора (q) і енергію електричного поля конденсаторів (W). $\frac{1}{C_x} = \frac{1}{C} = \frac{1}{2C} = \frac{1}{3C} = \frac{1}{6C} \Rightarrow C_x = \frac{6C}{11}$ (1).

$q = C_x\varepsilon = 6C\varepsilon/11$ (2); $W = C_x\varepsilon^2/2 = 3C\varepsilon^2/11$ (3).

Після переключення в початковому стані маємо наступне коло (див. рис).

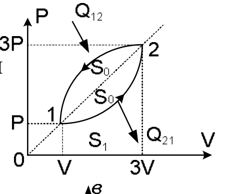
Коли конденсатори перезарядяться (струми зникнуть), отримаємо наступне коло. Резистори в колі не зображені, оскільки струмів немає. Для останнього кола визначимо: загальний заряд батареї (q_0), загальну ємність (C_0) і енергію електричного поля (W_0).



$q_0 = q - q + q = q$ (4); $C_0 = 3C + 2C + C = 6C$ (5)

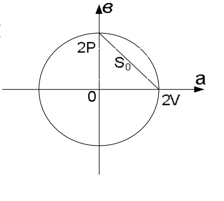
$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C_0} = \frac{q^2}{12C} = \frac{3C\varepsilon^2}{121}$$ (6). Тоді енергія, що виділиться на резисторах, дорівнює: $\Delta W = W - W_0 = 30C\varepsilon^2/121$.

Задача 4. В осях *PV* процес, заданий в умові, має вигляд, показаний на рисунку. На ділянці 1 – 2 газ приймає теплоту ($Q_{12} > 0$), оскільки робота газу $A_{12} > 0$, зміна внутрішньої енергії $\Delta U_{12} = (i/2)(P_2V_2 - P_1V_1) > 0$. На ділянці 2 – 1: $Q_{21} < 0$, $A_{21} < 0$, $\Delta U_{21} < 0$. (Враховано перший закон термодинаміки $Q = \Delta U + A$). К.К.Д. циклу визначають, як:



$$\eta = \frac{A_ц}{Q_{12}} = \frac{A_{12} + A_{21}}{Q_{12}} = \frac{2S_0}{Q_{12}}$$ (1) .

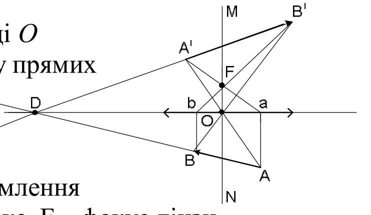
Враховано, що робота за цикл дорівнює площі обмеженій циклом в осях PV. Визначимо S_0 з геометричних міркувань. Площу кола з осями P і V шукаємо як площу еліпсу ($S = \pi$ a $в$) (оскільки розмірності на осях різні).



$S_0 = \pi 2P \cdot 2V/4 - 2P \cdot 2V/2 = PV(\pi - 2)$, тоді робота за

цикл $A_ц=2S_0=2PV(\pi-2)$. Теплоту (Q_{12}), отриману за цикл визначимо з першого закону термодинаміки $Q_{12}=\Delta U_{12}+A_{12}\,(i/2)\nu R(T_2-T_1)+A_{12}=$
$=(i/2)(P_2V_2-P_1V_1)+2S_0+S_1=(i/2)8PV+PV(\pi-2)+2V\cdot 2P=(14+\pi)PV$.

$$\eta=\frac{2(\pi-2)}{14+\pi}=13\%\,.$$



Задача 5. Оптичний центр лінзи лежить в точці *O* перетину прямих B^1B і AA^1. Точка D перетину прямих AB і A^1B^1 лежить у площині лінзи. Отже, лінза розміщена вздовж прямої OD. MN (MN перпендикулярна OD) – головна оптична вісь лінзи. Промені Aa і Bb після заломлення перетнуться у фокусі лінзи (Aa || Bb || MN). Отже, F – фокус лінзи.