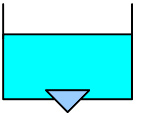
9 клас

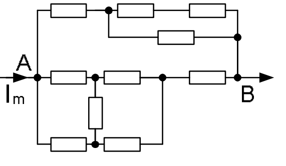


1. Отвір у дні посудини щільно закритий конічним корком. Площа основи корка **S**, висота **L**. Рівень дна посудини перетинає конус на половині його висоти. Густина корка та рідини дорівнює відповідно ρ_0 і ρ. Якою повинна бути мінімальна висота рівня рідини $\mathbf{H_m} > 0$ над основою конуса, щоб корок не спливав? Яку зовнішню силу **F**, напрямлену вгору, треба прикласти до корка, щоб його витягти, якщо висота рівня рідини над основою конуса $H > H_m$? Примітка: об'єм конуса V = SL/3.

2. У фільмах про східні єдиноборства можна бачити, як герой вибігає на вертикальну стіну. Оцініть максимальну висоту, на яку, розігнавшись до швидкості υ_0 = 6 м/с, може піднятись таким способом добре тренована людина. Коефіцієнт тертя між стінкою та взуттям μ = 0,6. Відомо, що рекорди зі стрибків у висоту трохи перевищують 2 м.

3. Гора має форму конусу, схил якого утворює кут α з горизонтом. На вершину гори веде дорога, яка піднімається під постійним кутом β до площини горизонту і навивається навколо гори так, що будь-яка ділянка дороги в напрямку, перпендикулярному до лінії підйому, горизонтальна. Визначити час t_1, за який можна піднятися на гору автомобілем, що їде зі сталою швидкістю υ. Уявіть, що наприкінці дороги у автомобіля відмовили коробка передач і гальма. Визначити, за який час t_2 автомобіль скотиться з гори при вмілому управлінні водія. За якого коефіцієнта тертя μ між колісною гумою і покриттям дороги це можливо? Опором повітря знехтувати. Висота гори h.

4. 10 однакових плавких запобіжників з'єднані так, як показано на рисунку. Окремий запобіжник перегоряє при протіканні через нього струму силою понад I_0 = 6А. Визначити силу струму I_m, при перевищенні якої точки А та В виявляться ізольованими одна від одної.

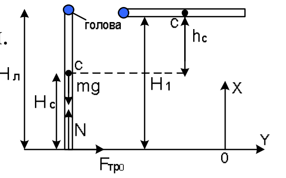


5. На дні посудини, вщент заповненої водою, горизонтально лежить тонке плоске дзеркало. Хлопець, нахилившись над посудиною, бачить зображення свого ока в дзеркалі на відстані d = 25 см. Відстань від ока до поверхні води h = 5 см. Показник заломлення води n = 4/3. Визначити глибину посудини. Всі кути, які промінь утворює з вертикаллю, малі.

9 клас (розв'язки)

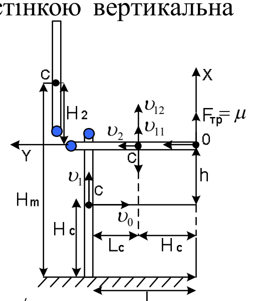
Задача 1. *Див. 8 клас, задача№3.*

Задача 2. Нехай висота людини $H_л = 170 \div 180$ см, а його центр мас (С) знаходиться на висоті $H_c = 0,9$ м. У фільмах про східні єдиноборства ми бачили, що для спортсменів нанести удар на висоті $H_1 = 2,15$ м, знаходячись у горизонтальному стані, не становить труднощів. Розглянемо поштовх спортсмена (див.рис), записавши другий закон Ньютона в проекції на вісь OX. $(N - mg)\Delta t = \upsilon_1 m$ (1), де N – середня сила реакції опори, Δt – час поштовху, υ_1 – вертикальна складова швидкості спортсмена після поштовху, m – маса спортсмена. Оскільки після поштовху центр мас спортсмена піднімається на висоту $h_c = H_1 - H_c = \upsilon_1^2/2g$, визначимо вертикальну швидкість спортсмена $\upsilon_1 = \sqrt{2g(H_1 - H_c)} = 5$ м/с. Вважаючи, що при поштовху спортсмен переміщає свій центр мас приблизно на $\Delta h_c = (0,1 \div 0,15)$м, оцінимо вертикальне прискорення спортсмена.



$N - mg = ma = m\upsilon_1^2/(2\Delta h_c) \Rightarrow a = 100$ м/с^2 = 10g (Зрозуміло, що це витримає тільки добре тренований спортсмен). Оскільки **a** суттєво більше за **g** , силою тяжіння в рівнянні (1) при оцінках можна нехтувати.

Нехай при вбігання на стінку спортсмен відштовхується від підлоги на відстані L = 1,5 м від стінки. Тоді, до взаємодії із стінкою його центр мас проходит відстань $L_c = L - H_c = 0,6$ м (вважаємо, що при взаємодії із стінкою спортсмен розташований практично горизонтально). Час польоту до стінки $t_1 = L_c/\upsilon_0 = 0,1$ с. За мить до взаємодії із стінкою вертикальна швидкість спортсмена $\upsilon_{11} = \upsilon_1 - gt_1 = 4$ м/с. Нехай, після взаємодії із стінкою, спортсмен рухається назад з горизонтальною швидкістю $\upsilon_2 = 3$ м/с $= \upsilon/2$ (це достатньо реально), вверх із швидкістю υ_{12}. Для часу взаємодії із стінкою (Δt) запишемо другий закон Ньютона.



OX: $(\mu N - mg)\ \Delta t \approx \mu N \Delta t = m(\upsilon_{12} - \upsilon_{11})$ (2)

OY: $N \Delta t = (\upsilon_0 + \upsilon_2)$ (3)

З рівнянь (2) і (3) отримаємо $\upsilon_{12} = \mu\ (\upsilon_0 + \upsilon_2) + \upsilon_{11} = 9,4$ м/с

Після взаємодії із стінкою центр мас підніметься, ще на $H_2 = \upsilon_{12}^2/2g = 4,4$ м.

Точка взаємодії спортсмена із стінкою **О** знаходиться на висоті:

$H_0 = H_c + h = H_c + \upsilon_1 t_c - g t_c^2/2 = 1,2$ м. Максимальна висота підйому спортсмена $H_м = H_0 + H_2 = 5,6$ м.

Задача 3. Розв'язок журі. Коли автомобіль піднімається вгору із сталою швидкістю υ, проекція швидкості автомобіля на вертикальний напрямок також має стале значення $\upsilon \sin\beta$. Отже висоту h у вертикальному напрямку автомобіль подолає за час $t_1 = \dfrac{h}{\upsilon \sin\beta}$ (1)

Розглянемо спуск автомобіля. Його швидкість буде збільшуватись зі сталим прискоренням $g\sin\beta$. Проекція цього прискорення на вертикальний напрямок $g\sin^2\beta$. Враховуючи, що початкова швидкість дорівнює нулю, з виразу для вертикальної координати $z = \dfrac{g\sin^2\beta t^2}{2}$ знаходимо час спуску (z = h): $t_2 = \dfrac{1}{\sin\beta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. (2)

Швидкість u, яку буде мати автомобіль біля підніжжя гори, знаходимо як добуток його прискорення $g\sin\beta$ на час руху t_2

$$u = g\sin\beta \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

або із закону збереження енергії $mu^2/2 = mgh$. Для того, щоб автомобіль втримався на дорозі, необхідно, щоб сила тертя забезпечила доцентрове прискорення a_n, тобто $ma_n = F_{тр} \le \mu N = \mu\, mg\cos\beta$, звідки одержимо обмеження на коефіцієнт тертя $\mu \ge \dfrac{a_n}{g\cos\beta}$. (3)

Доцентрове (нормальне) прискорення можна розрахувати за різними формулами $a_n = \upsilon^2/R = \omega^2 R = \upsilon\,\omega$, але чому дорівнює радіус R кривизни траєкторії, або кутова швидкість? Оскільки траєкторія „розкручується", радіус кривизни більший за відстань від точки траєкторії до осі конуса. Розглянемо систему координат, яка починається у геометричній вершині конусу з віссю OZ напрямленою вздовж його осі вниз. Тоді координата z і відстань r від осі OZ до точки траєкторії пов'язані співвідношенням $r = z\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, яке власне і є рівнянням конічної поверхні. Таке ж співвідношення буде між вертикальною складовою швидкості $u_z = u\sin\beta$ і радіальною складовою u_r, з якою автомобіль віддаляється від осі конуса: $u_r = u_z\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Проекція швидкості автомобіля на горизонтальну площину $u\cos\beta$ має не тільки радіальну складову швидкості $u_r = u\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, але й тангенціальну складову $u_t = \omega r$, які взаємно перпендикулярні. Отже

$(u\sin\beta \operatorname{ctg}\alpha)^2 + (\omega r)^2 = (u\cos\beta)^2$, звідки знаходимо:

$$\omega = \frac{u\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{r\sin\alpha} = \frac{u\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{z\cos\alpha}.$$

Ми визначили кутову швидкість руху автомобіля відносно осі конуса. За умовою задачі з такою ж кутовою швидкістю змінюється напрям руху автомобіля. Нормальне прискорення визначимо із формули $a_n = \upsilon\,\omega$, $\upsilon = u\cos\beta$ – проекція швидкості автомобіля на горизонтальну площину.

Отже $\mu \geq \dfrac{\omega u}{g} = \dfrac{u^2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{gz\cos\alpha}$. Із закону збереження енергії $mu^2/2 = mg(z - z_0)$ визначимо швидкість і підставимо у вираз для коефіцієнту тертя:

$$\mu \geq \frac{\omega u}{g} = \frac{2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\cos\alpha}\left(1 - \frac{z_0}{z}\right).$$

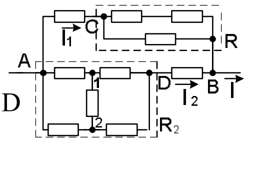
Якщо знехтувати розмірами майданчику, отримаємо обмеження на μ, яке не залежить від того, наскільки спустився автомобіль, і є однаковим для будь-якої висоти: $\mu \geq \dfrac{2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\cos\alpha}$.

Це виявилося можливим за рахунок того, що радіус траси зі збільшенням швидкості руху автомобіля збільшується саме настільки, щоб точно компенсувати всі виникаючі бокові перевантаження.

Нарешті зазначимо, що відповідь для часу підйому автомобіля зі сталою швидкістю (1) також повинна бути доповнена обмеженням або на коефіцієнт тертя, або на величину сталої швидкості υ, оскільки сили тертя можуть не впоратись із забезпеченням підйому ($F_{\parallel} = mg\sin\beta$) і доцентрового прискорення ($F_п = ma_n$) перед самим майданчиком, особливо якщо той має невеликий радіус. Нагадаємо, що сила тертя не може перевищити добуток коефіцієнта тертя на силу реакції опори $F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_n^2} \leq \mu N = \mu mg\cos\beta$.

Задача 4. Розв'язок журі. Основним елементом плавкого запобіжника є тонка металева дротинка. Якщо сила струму, що проходить по ній, перевищує задане значення, то дротинка плавиться за рахунок теплоти, яка виділяється в ній, і в колі утворюється розрив.

Нехай опір окремого запобіжника дорівнює R. Тоді опір R_1 ділянки кола між точками C і B (*див. рис.*) дорівнює (2/3)R. Опір R_2 ділянки кола між точками A і D



легко визначити, якщо врахувати, що різниця потенціалів між точками 1 та 2 дорівнює нулю (збалансований місток Уітстона), а тому без зміни розподілу струмів у колі ці точки можна з’єднати між собою провідником, або розімкнути. Отже, опір ділянки кола між точками A і D дорівнює $R_2 = R$.
Нехай, як це показано на рисунку, сила струму через запобіжник, який з’єднує точки A і C, дорівнює I_1, а через запобіжник увімкнутий між точками D і B, дорівнює $I_1(R + R_1) = I_2(R + R_2)$.
З цих виразів випливає, що $I_2 = (5/6)I_1$. Отже, при $I_m = (11/6)I_0$ повинен перегоріти запобіжник, який з’єднує точки A і C, внаслідок чого одразу перегорить запобіжник DB і точки A і B виявляться ізольованими одна від одної. Таким чином, $I_m > (11/6)I_0 = 11$ А.

Задача 5. Розв’язок журі. При розв’язанні задач з геометричної оптики важливо правильно побудувати хід променів (*див. рис1.*). Для побудови зображення використаємо два промені. Перший промінь беремо вертикальним. Другий іде під невеликим кутом α до першого. На межі розділу повітря – вода другий промінь зазнає заломлення та після відбиття від поверхні дзеркала виходить з води під кутом α, що визначається законом заломлення:

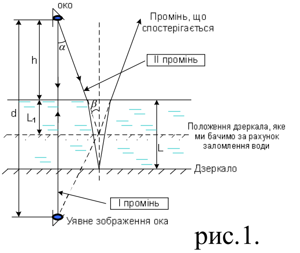


рис.1.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

Оскільки кути малі, то $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$ (рад).
Тоді з *рис.2.*, розглядаючи тангенси кутів трикутників з однаковою основою, маємо:

$$\frac{L}{L_1} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

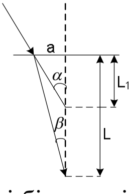


рис.2.

Відстань до уявного зображення, як відомо, вдвічі більша ніж до зеркала, тому з рис.1. маємо: $d = 2\cdot(h + L_1)$

Тоді: $$d = 2\cdot(h + \frac{L}{n})$$

Звідки отримуємо остаточну відповідь: $L = n\cdot(\frac{d}{2} - h)$

Проводимо розрахунки: $L = \frac{4}{3}\cdot(\frac{25}{2} - 5)$ = 10 см.