

## 11 клас

1. При певному значенні кута  $\alpha$  нахилу площини розглядаються два випадки руху трубки по цій площині. В першому випадку поздовжня вісь трубки утворює з горизонтом кут  $\alpha$ , а в другому вона під час руху залишається горизонтальною. В обох випадках трубка спочатку була нерухомою. Визначити ті значення кута  $\alpha$  при яких в обох випадках вісь трубки має однаковий закон руху. При цьому визначити та порівняти кількість виділеного тепла при однакових вертикальних переміщеннях  $h$ . Коефіцієнт тертя ковзання  $\mu$  заданий, тертям кочення знехтувати.

2. Велосипед їде зі сталою швидкістю  $v$ . Перпендикулярна до площини колеса складова індукції магнітного поля Землі дорівнює  $B$ . Визначити залежність від часу ЕРС індукції, яка виникає в спиці. Вважати, що спиці розташовані радіально, а їхня довжина дорівнює радіусу колеса  $R$ . Нехтуючи опором ободу колеса, знайти розподіл струмів через спиці та розташування точок рівного потенціалу.

3. Електричне коло складене з джерела змінної ЕРС  $E(t) = E_m \sin \omega t$ , активного опору  $R$  та діода з вольт-амперною характеристикою  $I(U) = \alpha U^2$ ,  $U > 0$ ,  $I(U) = 0$ ,  $U \leq 0$ . а) Знайти миттєве значення напруги на діоді. б) Вважаючи виконаною умову  $\alpha R E_m \ll 1$ , розрахувати постійну складову струму через опір  $R$ . в) Нехай тепер паралельно до опору  $R$  увімкнений конденсатор ємністю  $C$ . Вважаючи виконаними умови  $R \gg (\omega C)^{-1} \gg (\alpha E_m)^{-1}$ , знайти глибину пульсацій (відношення пульсаційної складової до постійної складової напруги) на ємності. Вказівка: зарядка конденсатора  $C$  через опір  $R$  від джерела напруги  $U_0$  відбувається за законом  $U(t) = U_0[1 - \exp(-t/RC)]$ , розрядка від початкової напруги через опір  $R$  – за законом  $U(t) = U_0 \exp(-t/RC)$ .

4. Літак швидко набирає висоту над морем і в момент входу в зону прямого бачення берегової лінії пілот починає приймати радіо 106 FM від передавача, який знаходиться на березі на висоті  $h = 30$  м над рівнем моря на відстані  $L = 60$  км від літака. Протягом подальшого підйому інтенсивність радіосигналу періодично змінюється, хоч відстань  $L$  залишається незмінною. Вважаючи, що радіохвилі поширюються в однорідній атмосфері, визначити різницю висот між першим та другим найнижчими максимумами інтенсивності, зареєстрованими пілотом.

5. Щоб краще роздивитися сцену в театрі, короткозорий глядач попросив у далекозорого сусіда окуляри, якими той користувався для читання. Короткозорий чітко бачить без окулярів у межах від  $d_1 = 14$  см до кількох десятків сантиметрів. Далекозорий без окулярів чітко бачить предмети не ближче  $d_2 = 2$  м від очей. Яким чином короткозорий глядач, користуючись окулярами сусіда, може роздивитись сцену? Чи будуть деталі сцени здаватися йому чіткими? Вважати, що сцена знаходиться досить далеко.

**Задачі запропонували:**

8 клас – С.У.Гончаренко (1-3), О.Ю.Орлянський (4-5).

9 клас – С.У.Гончаренко (1,4,5), О.Ю.Орлянський (2,3).

10 клас – А.П.Федоренко (1), О.Ю.Орлянський (2,4), С.У.Гончаренко(3-5).

11 клас – А.П.Федоренко (1), О.Ю.Орлянський (2), І.О.Анісімов (3),

В.П.Сохацький (4), С.У.Гончаренко (5).

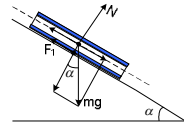
## 11 клас

**Задача 1. Розв'язок журі.** В першому випадку (рис.1.) сила тертя  $F_1 \leq \mu mg \cos \alpha$ . При  $tg \alpha \leq tg \alpha_0 = \mu$  сила тертя

$F_1 = mg \sin \alpha$ , при  $tg \alpha > tg \alpha_0 = \mu$  сила тертя

$F_1 = \mu mg \cos \alpha$ . У другому випадку (рис.2.) сила тертя

$F_2 \leq \mu mg \cos \alpha$ . Трубка буде котитись без проковзування рис.1.



при  $0 < \alpha \leq \alpha_1$ . Знайдемо цей граничний кут  $\alpha_1$ . Кочення трубки розглядаємо. Знайдемо цей граничний кут  $\alpha_1$ . Кочення трубки розглядаємо як складний рух, що складається з поступального руху осі С циліндра та обертowego руху навколо осі С. Два рівняння цих простих рухів мають

вигляд. 
$$\begin{cases} mg \sin \alpha - F_2 = ma_c \\ F_2 r = I_c a_c / r. \end{cases} \quad (1)$$

Позначимо  $I_c / r^2 = km$ . Тоді із системи (1) одержимо  $a_c = g(\sin \alpha / (1+k))$ , (2)  $F_2 = mg \sin \alpha (k / (1+k))$ , (3).

При  $\alpha = \alpha_1$   $mg \sin \alpha_1 (k / (1+k)) = \mu mg \cos \alpha_1$ , звідки одержимо  $tg \alpha_1 = ((1+k)/k) \mu$ . (4)

Для трубки значення моменту інерції поперечного перерізу лежить в межах  $mr^2 / 2 \leq I_c \leq mr^2$ . Отже  $1/2 \leq k \leq 1$ .

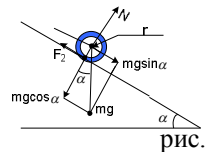
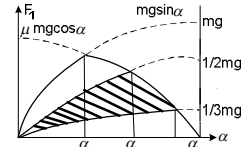


рис.2.

$$\operatorname{tg} \alpha_{1\max} = 3\mu \text{ при } k = 1/2 \text{ або } \alpha_{1\max} = \operatorname{arctg} 3\mu,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{2\max} = 2\mu \text{ при } k = 1 \text{ або } \alpha_{1\max} = \operatorname{arctg} 2\mu.$$

При  $\alpha \geq \alpha_1$  сила тертя досягає максимального значення і дорівнює  $F_2 = \mu mg \cos \alpha$



Отже, на інтервалі  $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$ , де  $\alpha_{2\max} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1\max}$  сили тертя в обох випадках однакові ( $F_1 = F_2$ ). Це означає, що на цьому інтервалі центр мас трубки має однаковий закон руху в обох випадках (однакова маса з положення рівноваги рухається під дією однакових сил).

При переміщенні по вертикалі на величину  $h$  потенціальна енергія трубки змінюється на величину  $\Delta\Pi = mgh$  і йде на зміну кінетичної енергії та на виділення тепла. Тому в першому та другому випадку відповідно мають

$$\text{місце рівняння: } \begin{cases} \Delta\Pi = \Delta T_1 + Q_1, \\ \Delta\Pi = \Delta T_1 + \Delta T_2 + Q_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Де } \Delta T_1 = mv_c^2/2, \Delta T_2 = I_c \omega^2/2.$$

$$\text{Із системи (5) одержимо } Q_1 - Q_2 = I_c \omega^2/2. \quad (6)$$

Отже, при коченні з ковзанням тепла виділяється менше рівно на стільки, скільки кінетичної енергії акумулюється в обертальному русі. При цьому поступальний рух поздовжньої осі трубки однаковий в обох випадках.

Знайдемо  $\omega^2$  для заданих значень  $h$  та  $\alpha$ . З рівняння (1) знаходимо, що  $a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .

$$S = h/\sin \alpha = a_c t^2/2, \text{ тому } t^2 = 2h/g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha.$$

$$\varepsilon = M_c/I_c = r \cdot \mu mg \cos \alpha / I_c = \mu g \cos \alpha / rk.$$

$$\omega^2 = (\varepsilon t)^2 = (\mu^2 g^2 2h / r^2 k^2)(\cos^2 \alpha / (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha).$$

Отже, згідно (6) отримуємо остаточну відповідь:

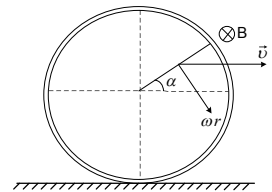
$$Q_1 - Q_2 = \mu^2 mgh / ktg \alpha (tg \alpha - \mu), \quad \alpha > \operatorname{arctg}(((1+k)/k)\mu).$$

### Задача 2. Розв'язок журі.

ЕРС – це робота сторонніх сил по переміщенню одиничного заряду. У нашому випадку сторонньою силою є напрямлена вздовж спиці складова сили

$$\text{Лоренца } F_{\parallel}. \text{ Тобто } E = \frac{A_{cm}}{\Delta q} = \frac{1}{\Delta q_0} \int_0^R F_{\parallel} dr = \int_0^R B v_n dr,$$

де  $v_n = \omega r + v \sin \alpha$ , перпендикулярна до спиці складова швидкості  $\omega = v/R$  – кутова швидкість руху (див. рис.). Отже:



$$E = \int_0^R B(\omega r + v \sin \alpha) dr = B(\omega(r^2/2) + v \sin \alpha \cdot r) \Big|_0^R = BvR(1/2 + \sin \alpha). \quad (1)$$

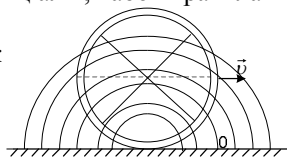
Якщо колесо котиться рівномірно,  $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ , де  $\alpha_0$  – кут, який утворювала спиця з напрямком руху колеса в момент початку відліку часу.

$$E(t) = BvR(1/2 + \sin(\alpha_0 - \omega t)) \quad (1^*)$$

Зазначимо, що цей вираз можна було отримати інакше: розглянувши зміну магнітного потоку через уявний контур, площа якого змінюється за рахунок руху спиці (див. примітку А).

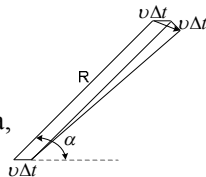
З виразу (1) для  $E(t)$  видно, що за час руху ЕРС індукції періодично змінює свій напрям, але за один оберт середнє значення ЕРС індукції дорівнює  $1/2 BvR$ . Здається, що з центру колеса струми повинні розходитись вгору через верхні спиці, а потім через обод колеса з нульовим опором стікати вниз і повертатись до центру вже через ті спиці, які знаходяться у цей момент часу знизу. При невеликих опорах спиць ці струми можуть бути досить значними. Насправді ніякі струми через спиці не течуть, оскільки дільниці ободу також рухаються, і в них також наводиться ЕРС. Дійсно, дві спиці з відповідною дільницею ободу утворюють замкнутий контур, магнітний потік через який не змінюється, оскільки не змінюється ні площа контуру, ні кут з вектором магнітної індукції, ні її значення. Це можна довести більш детально, якщо розглянути ЕРС індукції в дільницях ободу, а потім скористатись методом вузлових потенціалів, або правилами Кірхгофа (див. примітку В).

Оскільки струми відсутні, різниця потенціалів між двома точками спиці буде дорівнювати ЕРС, яка між цими точками наводиться. Картина еквіпотенціальних поверхонь стає зрозумілою, якщо розглянути рух колеса з точки зору миттєвої осі обертання. Однаковий потенціал мають точки колеса, які рівновіддалені від точки дотику колеса і поверхні землі, яка має відносно Землі нульову швидкість (див. рис.). Це можна довести математично строго (див. примітку С).



### Примітка А.

З рисунку видно, що враховуючи нескінченно мале значення  $v\Delta t$ , площу, яку „замітає” спиця, можна уявити як суму площі паралелограма і площі трикутника, тобто  $\Delta S = v\Delta t R \sin \alpha + (1/2)v\Delta t R$  і далі

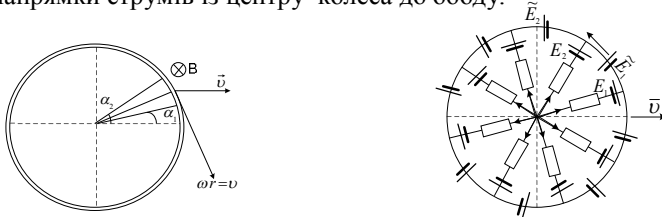


$E = -\Delta\Phi / \Delta t = -BvR(1/2 + \sin \alpha)$ , де знак „-” означає, що ЕРС рухає заряди вздовж зображеної спиці від центру колеса до його ободу, якщо лінії індукції входять в площину рисунка, і у зворотному напрямі, якщо виходять.

**Примітка В.** Припустимо, що дільницю ободу видно з центру колеса під кутами від  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$  (див. рис.). Тоді

$$\tilde{E} = \int B v_n dr = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} B v \cos \beta R d\beta = B v R (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

Еквівалентна схема для восьми спиць має вигляд зображений на рисунку. Оберемо напрямки струмів із центру колеса до ободу.



Тоді

$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \dots = 0$ . Для замкненого кола в яке входять

$E_1, E_2, \tilde{E}_1$  маємо  $E_1 + \tilde{E}_1 - E_2 = I_1 R - I_2 R$ , або

$$B v R (1/2 + \sin \alpha_1) + B v R (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) - B v R (1/2 + \sin \alpha_2) = (I_1 - I_2) R.$$

Тобто після скорочення знаходимо, що  $I_1 = I_2$  незалежно від номера спиці. Це означає, що всі струми однакові. Оскільки їх сума дорівнює нулю, струми через спиці не йдуть.

**Примітка С.** Оскільки струми відсутні, різниця потенціалів між двома точками спиці буде дорівнювати ЕРС, яка між цими точками наводиться. Обравши потенціал центру колеса за нуль, згідно формули (1) знаходимо потенціал спиці на відстані  $r$  від її центру

$$\varphi = \int_0^r B(\omega r + v \sin \alpha) dr = B \left( \omega \frac{r^2}{2} + v \sin \alpha \cdot r \right) = B v R \left( \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R} \sin \alpha \right).$$

Зазначимо, що декартові координати цієї точки спиці відносно системи координат пов'язаної з центром колеса ( $r \cos \alpha$ ;  $r \sin \alpha$ ). Тоді:

$$\varphi = B v R \left( \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} + \frac{y}{R} \right),$$

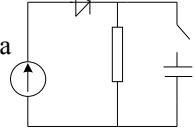
звідки знаходимо, що еквіпотенціальні поверхні мають циліндричну форму і в площині колеса задаються рівнянням кіл з центром у точці дотику колеса і поверхні землі:  $x^2 + (y + R)^2 = R^2 + (2R/v) \varphi$ .

**Задача 3. Розв’язок журі.**

Випадки (а-б) відповідають розімкненому ключу на рисунку.

а) За другим законом Кірхгофа  $E(t) = U_d(t) + i(t)R$ , (1)

де  $U_d$  – падіння напруги на діоді. Коли прикладена напруга від’ємна, струм через діод не протікає, і вся прикладена напруга падає на діоді. Коли прикладена напруга додатня, то  $i(t) = \alpha U_d^2(t)$ . (2)



В останньому випадку після підстановки (2) до (1) можна отримати квадратне рівняння. Його позитивний корінь має вигляд:

$$U_d = \frac{\sqrt{1 + 4\alpha RE} - 1}{2\alpha R}. \quad (3)$$

Отже,  $U_d(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + 4\alpha RE} - 1}{2\alpha R} \cdot E(t) & E(t) > 0; \\ E(t) & E(t) < 0. \end{cases} \quad (4)$

б) за умови  $\alpha RE_m \ll 1$  (опір R значно менший за ефективний опір діода  $1/\alpha E_m$ ) формула (4) спрощується і набуває вигляду  $U_d(t) = E(t)$ . Тоді струм через діод можна подати у формі

$$i(t) = \begin{cases} \alpha E^2(t) = \alpha E_m^2 \sin^2 \omega t, & E(t) > 0; \\ 0, & E(t) < 0. \end{cases}$$

Розкладаючи квадрат синуса за формулою  $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$  і враховуючи, що протягом половини періоду струм не протікає взагалі, отримаємо:

$$\bar{i} = 1/4 \alpha E_m^2. \quad (6)$$

в) цей випадок відповідає замкненому ключу на рисунку.

Тепер ефективний опір діода вважається значно меншим за опір R. Тому при додатній полярності прикладеної напруги падінням напруги на діоді можна знехтувати.

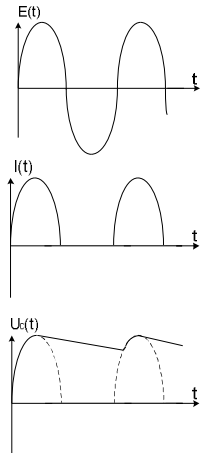
В результаті струм через діод за відсутності конденсатора

мав би вигляд (див.рис.).  $i(t) = \begin{cases} E(t) / R, & E(t) > 0; \\ 0, & E(t) < 0. \end{cases} \quad (7)$

Насправді частина струму через діод іде на зарядку

конденсатора. Умова  $(\omega C)^{-1} \gg (\alpha E_m)^{-1}$  означає, що час

зарядки конденсатора через діод значно менший від періоду. Завдяки цьому напруга на конденсаторі буде відслідковувати напругу на опорі R, доки діод залишати-



меться відкритим. Як тільки вхідна напруга пройде через максимум і почне падати, діод закриється, оскільки напруга на конденсаторі буде вищою від вхідної (конденсатор розряжається через великий опір R, тому напруга на ньому змінюється повільніше від вхідної). Підзарядка конденсатора знову почнеться тільки через час, що приблизно дорівнює періоду коливань (див.рис.). Таким чином, постійна складова напруги на конденсаторі буде близькою до  $E_m$ , а амплітуда пульсацій може бути оцінена як

$$\Delta U = E_m - U\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = E_m \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\omega RC}\right)\right] \approx \frac{2\pi E_m}{\omega RC}. \quad (8)$$

Тоді глибина пульсацій буде  $\frac{\Delta U}{E_m} \approx \frac{2\pi}{\omega RC}$ .

#### Задача 4. Розв'язок журі.

1) Промінь, відбитий від поверхні, змінює свою фазу на  $\pi$ .

2) Різницю фаз між променями (різницю ходу)

можна визначити з геометричної побудови

$BD = h/\sin \alpha$ ;  $BC = BD \cos 2\alpha = h \cos 2\alpha / \sin \alpha$

Різниця ходу:  $\delta = BD - BC = (h/\sin \alpha)(1 - \cos 2\alpha)$ .

3) З умови утворення максимуму між прямим та відбитим променями:

$(h/\sin \alpha)(1 - \cos 2\alpha) = (\lambda/2)(2n+1)$  визначаються кути (синуси кутів), під

яким видно літак з берега. Використавши  $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ , отримаємо:

$2h \sin \alpha = (\lambda/2)(2n+1)$ , або  $\sin \alpha = \lambda(2n+1)/4h$  звідки  $\sin \alpha_1 \approx 0,025$  (для  $n=0$ )

та  $\sin \alpha_2 \approx 0,075$  (для  $n=1$ )

Різниця висот:  $\Delta h = h_2 - h_1 = L \sin \alpha_2 - L \sin \alpha_1 \approx 3$  км.

#### Задача 5. Розв'язок журі.

1) Фокусну відстань збиральної лінзи окулярів

можна знайти з рівняння  $1/d_0 + 1/(-d_2) = 1/F$ ,

Де  $d_0 = 25$  см – відстань, на якій далекозорий в окулярах тримав газету,

одержуючи уявне зображення в лінзі на відстані  $d_2$ . Тоді

$$F = \frac{d_2 \cdot d_0}{d_2 - d_0} = \frac{200 \cdot 25}{200 - 25} \approx 29 \text{ (см)} \quad (D = +3,5 \text{ дптр})$$

Для одержання максимального збільшення короткозорому потрібно

тримати окуляри на витягнутій руці на відстані:  $F + d_1 \approx 29 + 14 = 43$  (см)

від ока і роздивляться дійсне обернене зображення, яке буде для нього різким, оскільки воно потрапляє в межі його чіткого бачення.

Зображення видно чітко, але воно виявляється оберненим.

