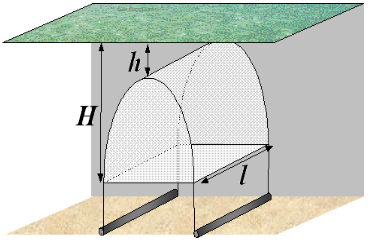
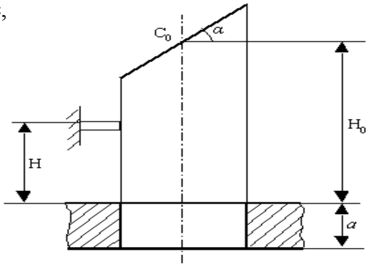
10 клас

1. На *мал. 1* схематично показано найпростіший варіант підводного приміщення, заповненого повітрям, у якому прозора плівка піднімається від дна вертикально вгору. Відстань між двома поверхнями води $H = 3{,}5$ м, $h = 1$ м, $l = 16$ м. Визначити тиск у підводному приміщенні, сили, з якими плівку утримують донні кріплення, та об'єм повітря, який захопив насос з поверхні води під час нагнітання. Уявіть, що Ви стоїте посередині приміщення і якраз над Вашою головою пропливає невелике кільце. Як зміниться його форма, якщо подивитися вгору?



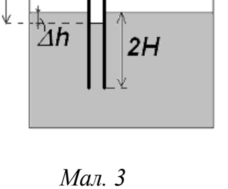
Мал. 1

2. Гантель масою m у вигляді двох точкових мас, з'єднаних абсолютно твердим стержнем довжиною L, падає поступально з деякої висоти H_0. Кут нахилу стержня до горизонту $\alpha = \pi/4$ (*мал. 2*). Гантель при заданому значенні кута α здатна впритул пройти крізь щілину в горизонтальній плиті. На висоті H гантель абсолютно пружно стикається з краєм горизонтального виступу і за час подальшого польоту до досягнення однією з мас верхньої площини плити повертається на кут $2{,}5\pi$. З якої висоти H_0 почала падати гантель? Яку максимальну товщину *a* може мати плита для того, щоб гантель пролетіла крізь щілину, не торкнувшись її? Вважати, що момент інерції гантелі відносно центра мас $I_c = mL^2/8$; довжина стержня $L = (2^{1/2}H)/5$; прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2; втрат механічної енергії немає, товщиною виступу знехтувати.



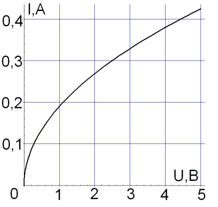
Мал. 2

3. Запаяну з одного кінця трубку, в якій знаходиться деяка кількість повітря, опустили в резервуар з водою (*мал. 3*). Довжина підводної частини трубки 2H, рівень води в трубці знаходиться на відстані H від запаяного кінця. Початкова температура 273 К, атмосферний тиск нормальний. Знайдіть положення рівня води у трубці після нагрівання всієї системи до 373 К. Тиском насиченої пари при 273 К знехтувати. Як зміниться положення рівня води в трубці, якщо систему охолодити до початкової температури? $H = 1$ м, $\Delta h = 30$см.

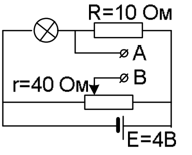


Мал. 3

4. На *мал. 4* подана вольт-амперна характеристика лампочки. Лампочку увімкнено в коло, зображене на *мал. 5*. Визначити графічно силу струму в лампочці. При якому положенні повзунка потенціометра напруга між точками A і B дорівнює нулю? При якому положенні повзунка ця напруга майже не змінюватиметься при малих змінах ЕРС батареї? Внутрішнім опором батареї знехтувати.



Мал. 4



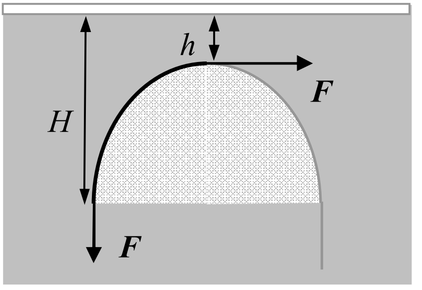
Мал. 5

5. Космічний корабель підлітає до Місяця по параболічній траєкторії, яка майже дотикається до його поверхні. В момент максимального зближення на короткий час вмикається гальмівний двигун і корабель переходить на колову орбіту супутника Місяця. Визначити зміну швидкості корабля і зміну радіусу кривини траєкторії при гальмуванні. Радіус Місяця R_M = 1740 км, прискорення вільного падіння на його поверхні g_M = 1,7м/с^2. *Вказівка*. На параболічній траєкторії на нескінченній віддалі від Місяця швидкість корабля дорівнює нулеві.

Задачі запропонували О. Ю. Орлянський (1), А. П. Федоренко (2), І. Л. Рубцова (3), С. У. Гончаренко (4 – 5).

10 клас

Задача 10.1



Тиск у приміщенні дорівнює тиску води на глибині *H*, тобто $P = P_A + \rho g H \approx 135\,\text{кПа}$.

Оскільки сили тиску діють перпендикулярно до поверхні плівки, сила натягу плівки всюди однакова і дорівнює *F*. Розглянемо половину плівки (*див. мал.*). На неї діють дві сили натягу, сила повітряного тиску зсередини приміщення і сила гідростатичного тиску ззовні. Враховуючи те, що з глибиною сила тиску змінюється лінійно, запишемо проекцію умови рівноваги плівки на горизонтальний напрямок: $\left(P_A + \rho g(H+h)/2\right)\left(H-h\right)l + F = \left(P_A + \rho g H\right)\left(H-h\right)l$,

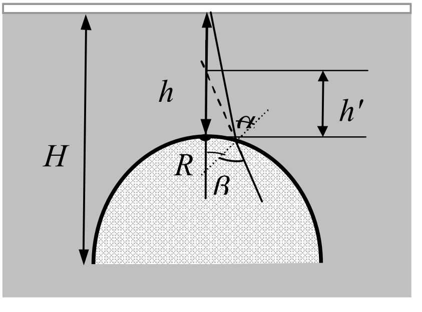
звідки знаходимо $F = (1/2)\rho g l\left(H-h\right)^2 \approx 500\,\text{кН}$, або для коефіцієнта поверхневого натягу плівки $\sigma = F/l = (1/2)\rho g \Delta H^2 \approx 31\,\text{кН/м}$.

Замість проекції умови рівноваги плівки на вертикальний напрямок зручніше скористатися тим, що дві сили натягу 2F утримують великий об'єм повітря, на який діє сила Архімеда $\rho g V$ (масою повітря нехтуємо і внаслідок значної довжини *l* = 16 м приміщення нехтуємо особливостями на торцях). Отже об'єм повітря всередині приміщення: $V = 2F/\rho g = \Delta H^2 l = 100\,\text{м}^3$.

Звичайно, ці ж самі результати можна отримати за допомогою інтегрування.

За умовою задачі необхідно знайти об'єм повітря V_0, що нагнітався з поверхні води. Знайдений нами об'єм *V* знаходиться під тиском $P = P_A + \rho g H \approx 135\,\text{кПа}$. Вважаємо, що температури повітря на поверхні води і всередині приміщення однакові або мало відрізняються. Тоді $V_0 = PV/P_A \approx 135\,\text{м}^3$.

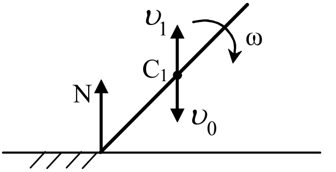
<u>Додаткова відповідь</u>. Внаслідок симетрії задачі, зрозуміло, що розміри зображення кільця будуть максимально відрізнятися у взаємоперпендикулярних напрямках, один з яких проходить вздовж приміщення.



Знайдемо спочатку радіус кривизни плівки у перпендикулярній до цього напрямку площині для найвищої точки куполу. Найпростіше це зробити, застосувавши формулу Лапласа для різниці тисків з двох сторін викривленої поверхні. В нашому випадку маємо $P - \left(P_A + \rho g h\right) = \sigma / R$ (другий радіус кривизни дорівнює нескінченності), звідки знаходимо $R = \sigma / \rho g \Delta H = \Delta H / 2$.

Розглянемо хід променів від точки на поверхні води крізь плівку в око спостерігачеві. Отримуємо, що зображення наблизиться до найвищої точки куполу на відстань $h' = h/n + (n-1)h/R$. У перпендикулярному напрямку ($R \to \infty$) ця відстань буде більшою $h'' = h/n$. Співставляємо відстані з кутовими розмірами і знаходимо відповідь на питання задачі.

Задача 10.2



Мал. 1

Спочатку встановимо наслідки пружного удару гантелі об виступ. Нехай перед ударом центр мас гантелі має швидкість υ_0 (*мал. 1*), а після удару центр мас матиме швидкість υ_1, а гантель – кутову швидкість ω. Згідно з теоремою про зміну імпульсу та теоремою про зміну моменту імпульсу, маємо систему двох рівнянь: $m(\upsilon_0 + \upsilon_1) = \tau P$, $I_C\omega = \tau PL/2\cos\alpha$.

Враховуючи, що $I_C = mL^2/8$, з цієї системи знаходимо $\omega = (4/L)(\upsilon_0 + \upsilon_1)\cos\alpha$. (1)

Удар абсолютно пружний, тому можна вважати, що кінетична енергія гантелі зберігається: $m\upsilon_0^2/2 = m\upsilon_1^2/2 + I_C\omega^2/2$,

Звідки з урахуванням (1) випливає

$$\upsilon_0^2 - \upsilon_1^2 = 2(\upsilon_0 + \upsilon_1)^2\cos^2\alpha . \quad (2)$$

З (2) за умови, що $\alpha = \pi/4$, випливає

$$\upsilon_1 = \frac{1 - 2\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^2\alpha}\upsilon_0 = 0 . \quad (3)$$

Тоді згідно (1)

$$\omega = \cos\alpha \frac{4}{L}\upsilon_0 = \frac{2\sqrt{2}}{L}\upsilon_0 . \quad (4)$$

Так, як час падіння після удару (*мал. 2*) $t_{12} = \sqrt{2H/3}$ і за цей час гантель повернеться на кут $5\pi/2$, то

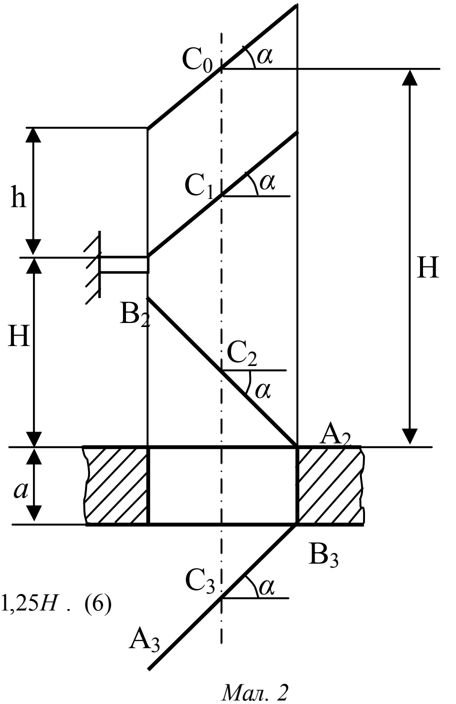
$$\omega = 5\pi/2t_{12} = (5\pi/2)\sqrt{g/2H} . \quad (5)$$

Тоді, згідно з (4),

$$\upsilon_0 = \omega L/2\sqrt{2} = (5\pi L/8)\sqrt{g/H} ,$$

$h = \upsilon_0^2/2g = (\pi/8)^2 H$ Отже,

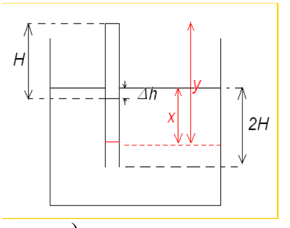
$$H_0 = H + h + (L/2)\sin\alpha = \left[1{,}1 + (\pi/8)^2\right]H \approx 1{,}25H . \quad (6)$$



Мал. 2

При максимальному a гантель додатково повернеться на кут π/2. Тому час її падіння до виходу з щілини $t_{13} = 3\pi/\omega = (6/5)\sqrt{2H/g}$.
Отже, максимальне значення товщини стінки:
$a = gt_{13}^2/2 - H - L\sin\alpha = (6/25)H = 0{,}24H$. (7)

Задача 10.3



1)T_1 = 273 K. Тиск у верхній частині труби визначається тільки тиском повітря і дорівнює:

$P_1 = P_{атм} + \rho g\Delta h$ (1)

2) T_2 = 373K. Тепер тиск у верхній частині трубки дорівнює сумі тисків повітря і насиченої пари (закон Дальтона):

$P_2 = P_{повітря} + P_{нас.пари} = P_{атм} + \rho gx$, (2)

де x – положення рівня води у трубці при T_2 відносно вільної поверхні води.

Оскільки $P_{нас.пари} = P_{атм}$ при 373 К, то з (2) $P_{повітря} = \rho gx$ (3)

3) Застосовуючи об'єднаний газовий закон для повітря, отримуємо (з (1) та (3)):

PV/T = const, $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2 \Rightarrow ((P_{атм} + \rho g\Delta h)/T_1)HS = (\rho gx/T_2)Sy$, (4)

де y – довжина стовпчика повітря і пари при T_2 , $y = x + H - \Delta h$. (5)

Підставивши числові значення, з (4) отримаємо: $13{,}7 = x^2 + 0{,}7x \Rightarrow x = 3{,}35$ м.

4) Цілком зрозуміло, що значення (3,35 м > 3 H) – більше, ніж повна довжина трубки 2,7 м, а, значить, повітря, досягнувши краю трубки, повністю витіснить з неї воду і вийде назовні у вигляді бульбашок.

Тобто при T_2 рівень води буде знаходитись на глибині 2H (там, де і кінець трубки).

5) При наступному охолодженні до T_1 рівень води в трубці не повинен повернутись до значення Δh , адже певна маса повітря вийшла, а тиск насиченої пари знову став малим. Ще раз скористаємось об'єднаним газовим законом:

T_2: $P_2^| = \rho g2H; \quad V_2^| = (3H - \Delta h)S;$ (8)

T_1: $P_1^| = P_{atm} + \rho gz; \quad V_1^| = (H - \Delta h + z)S;$ (9)

З використанням (8) і (9), PV/T = const:

$$\frac{\rho g 2H(3H-\Delta h)S}{T_2}=\frac{(P_{атм}+\rho g z)(H-\Delta h+z)}{T_1} \tag{10}$$

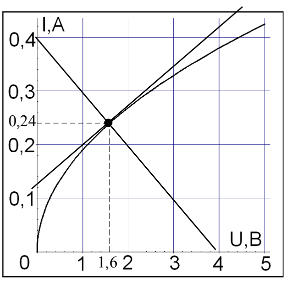
Підставивши числові значення, отримаємо:

$z_1 = -10{,}4$ м; $z_2 = -0{,}3$ м.

Оскільки $|z| \le 3H$, то перший корінь не підходить. Оскільки другий корінь від'ємний, то рівень води при охолодженні буде вище вільної поверхні води на 30 см і на 60 см вище початкового рівня.

Задача 10.4

а) Сила струму *I*, який проходить через лампу, і напруга *U* на ній пов'язані залежністю, показаною на *мал.* в умові задачі. Але при вмиканні лампи в коло сила струму і напруга виявляються зв'язаними ще одним співвідношенням: $U + I\cdot R = \varepsilon$. Зрозуміло, що коли побудувати цю графічну залежність, то точка перетину її з вольтамперною характеристикою лампи визначить значення *U* і *I*. Виконавши вказану побудову (*див. мал.*) знайдемо: $I = 0{,}24$ A, U = 1,6 B.



б) Щоб напруга U_{AB} між точками A і B дорівнювала нулю, треба так встановити повзунок потенціометра, щоб виконувалася рівність $U_{CB} = U_{R1} = U_{CA} = 1{,}6$ В. Отже, відношення опорів R_1 і R_2 "плеч" потенціометра ($r_1 + r_2 = r$) повинно задовольняти умові:

$\frac{r_1}{r_2}=\frac{U_{r1}}{U_{r2}}=\frac{U_{CA}}{\varepsilon - U_{CA}}$, звідки $r_1 = 16$ Ом, $r_2 = 24$ Ом.

в) Щоб при малій зміні ЕРС ε батареї напруга U_{AB} майже не змінювалася, треба так підібрати плечі потенціометра, щоб напруга на лівому плечі (r_x) була такою самою, як зміна напруги на лампі.

При зміні ЕРС на малу величину $\Delta\varepsilon$ напруга U_{CA} на лампі змінюється поблизу "робочої точки" (1,6 В) на малу величину $\Delta U_{CA} = \Delta\varepsilon - \Delta I\cdot r$,

де ΔI – зміна сили струму в лампі при малій зміні ΔU_{CA}. З'ясуємо, як залежить ΔI від ΔU_{CA}. Відношення $\Delta I / \Delta U_{CA}$ поблизу робочої точки дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіку функції $I(U_{CA})$ в робочій точці: $\Delta I / \Delta U_{CA} = k$.

Побудувавши дотичну, знайдемо k ≈ 0,08 (*мал.*), так що $\Delta I = \Delta U_{CA}\cdot k \approx 0{,}08\ \Delta U_{CA}$.

Отже $\Delta U_{CA} = \Delta\varepsilon - \Delta U_{CA}\cdot k\cdot r$, звідки $\Delta U_{CA} = \Delta\varepsilon/(1 + k\cdot R)$.

Напруга U_{CB} на лівому плечі потенціометра з опором r_x дорівнює $U_{CB} = (r_x / r)\cdot\varepsilon$;

при зміні ЕРС на мале значення Δε напруга U_{CB} змінюється на значення $\Delta U_{CB} = (r_x / r)\cdot\Delta\varepsilon$. Прирівнявши ΔU_{CA} і ΔU_{CB} , дістанемо: $r_x = r/(1 + k\cdot R)$

Підставивши числові значення, знайдемо $r_x \approx 22$ Ом, $r - r_x \approx 18$ Ом.

При цьому $U_{AB} \approx 0{,}6$ В, при зміні ЕРС ε в межах ±1 В значення U_{AB} змінюється менше ніж на 0,03 В.

Задача 10.5
При русі по параболічній траєкторії повна механічна енергія космічного корабля:

$$m \cdot \upsilon^2 / 2 - G \cdot M \cdot m / r = 0.$$

Тому швидкість корабля безпосередньо перед гальмуванням (у вершині параболи):

$$\upsilon_{\text{п}} = \sqrt{2GM_{\text{м}} / R_{\text{м}}} = \sqrt{2g_{\text{м}} R_{\text{м}}}.$$

Після переходу на колову орбіту швидкість корабля визначається з умови $a_{\text{доц}} = \upsilon_{\text{к}}^2 / R_{\text{м}} = g_{\text{м}}$, тому $\upsilon_{\text{к}} = \sqrt{g_{\text{м}} R_{\text{м}}}$. Таким чином швидкість при короткочасному гальмуванні повинна зменшитись у $\sqrt{2}$ разів або на

$$\Delta\upsilon = \upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{к}} = \sqrt{g_{\text{м}} R_{\text{м}}}\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{1{,}7 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6}\,(1{,}41 - 1)\,м/с \approx 7 \cdot 10^2\,м/с = 0{,}7\,км/с\ .$$

Радіус кривини траєкторії за час гальмування зменшиться у стільки ж разів, у скільки зменшиться квадрат швидкості, бо нормальне (доцентрове) прискорення до і після гальмування визначається силою гравітаційного притягання до Місяця і дорівнює $a_{\text{доц}} = g_{\text{м}} = F_{грав} / m$. Оскільки після гальмування радіус траєкторії стане рівним $R_{м}$, радіус кривини параболи в її вершині безпосередньо перед гальмуванням дорівнюватиме $R_{п} = 2R_{м}$. Таким чином радіус кривини траєкторії зменшиться на $\Delta R = R_{п} - R_{м} = R_{м} = 1740\ км$