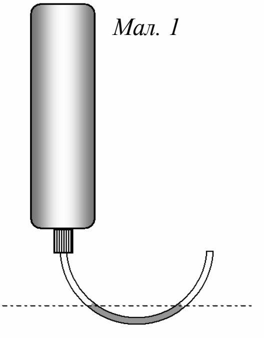
11 клас



Мал. 1

1. На літрову пляшку з повітрям герметично надіта трубка, яка має форму півкола і на третину заповнена водою. Визначити питому теплоємність повітря c_α в пляшці для випадку, зображеному на *мал. 1*, коли площина півкола вертикальна і відкритий кінець трубки спрямовано вгору. Уявіть, що Ви повернули всю конструкцію навколо горизонтальної осі, яка проходить через кінці водяного стовпчика, і вимірюєте теплоємність за різних кутів нахилу α. Побудуйте графік залежності теплоємності повітря всередині пляшки від α. Зовнішній тиск $P = 10^5$ Па, площа перерізу трубки $S = 0,5$ см^2. Тепловими втратами знехтувати. Значення теплоємності знайти на початку процесу теплопередачі для невеликих відхилень водяного стовпчика від симетричного положення.

2. Плоский металевий електрод, на який поданий потенціал φ_0, занурений у плазму, яка складається з нейтральних атомів, однозарядних іонів і електронів. Маса іона m_i, маса електрона m_e, концентрація плазми n_0, її температура T ($e\varphi_0 << kT$, де e – заряд електрона, k – стала Больцмана). Закон розподілу потенціалу вздовж осі z, перпендикулярної до електрода, має вигляд: $\varphi(z) = \varphi_0 \exp(-z/r_D)$, $z > 0$; $\varphi(z) = \varphi_0 \exp(z/r_D)$, $z < 0$; $r_D = (\varepsilon_0 kT/2e^2 n_0)^{1/2}$. Вважаючи, що довжина вільного пробігу іонів та електронів дорівнює відповідно λ_i та λ_e, знайдіть густину струму, що тече на електрод. Величини λ_i та λ_e вважати малими порівняно з відстанню, на якій помітно змінюється потенціал.

3. 23 лютого 1987 р. було зареєстровано сплеск нейтрино в діапазоні енергій від 7,5 до 40 МеВ (мегаелектронвольт). Є підстави вважати, що колосальну кількість нейтрино з середньою енергією близько 10 Мев випущено під час вибуху наднової в сусідній галактиці Велика Магелланова Хмара на відстані

   L = 160 000 світлових років від Землі (1 світловий рік – $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м) з області, розмірами якої можна знехтувати. Зараз питання про те, чи має нейтрино відмінну від нуля масу, є невирішеним. Одним зі способів з'ясування цього питання є вивчення розкиду моментів часу детектування нейтрино з різними енергіями, випущених одночасно. Оцініть проміжок часу Δt між моментами прийому одночасно випущених нейтрино з енергією E_1 = 10 Мев і E_2 = 40 Мев на вказаній відстані L, вважаючи, що: а) нейтрино – безмасова частинка;
   б) енергія спокою нейтрино $mc^2 \approx 10$ еВ; в) за знайденим часом $\Delta \boldsymbol{t}$ і відомими енергіями E_1 та E_2 отримайте вираз для маси, використовуючи малість відношення маси до енергії.

4. Для вимірювання кутової відстані ρ між компонентами тісної зоряної пари (подвійна зоря) попереду об'єктива телескопу вмістили діафрагму з двома вузькими паралельними щілинами, відстань d між якими можна змінювати. Зменшуючи d, зауважили, що перше погіршення видимості інтерференційної картинки у фокальній площині об'єктива настає при d = 125 см. Знаючи, що вимірювання проводилися на довжині хвилі світла λ = 0,555 мкм, знайти кутову відстань між компонентами подвійної зоряної системи. Обчислити реальну відстань між цими компонентами, якщо паралакс зорі складає μ = 0,08''. Кутовою відстанню ρ називають кут між компонентами зоряної системи при її спостереженні. Паралаксом μ називають кут, під яким із зорі "видно" радіус R орбіти обертання Землі навколо Сонця. Вважати, що $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$м.

5. На нитці довжини L підвішена однорідна кулька діаметром d = 6 см. При визначенні періоду малих коливань систему розглядають як математичний маятник. При якому мінімальному L це можливо, якщо похибка не повинна перевищувати 0,5%? Маса математичного маятника є точковою.

Задачі запропонували О. Ю. Орлянський (1), І. О. Анісімов (2), С. Й. Вільчинський (3), О. Г. Шевчук (4,5).

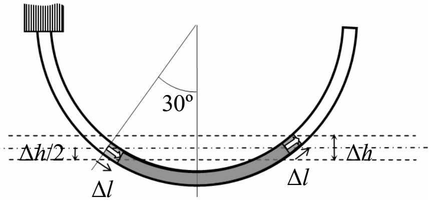
11 клас (розв'язки)

Задача 11.1

За означенням питома теплоємність c – це кількість теплоти, яку слід передати одиниці маси речовини, щоб нагріти її на один градус. З урахуванням першого закону термодинаміки і того, що повітря переважно складається з двохатомних газів азоту і кисню, отримаємо

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} = \left(P\Delta V + \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T \right) \Big/ m\Delta T = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu} + \frac{P\Delta V}{m\Delta T} = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{P\Delta V}{\dfrac{m}{\mu}R\Delta T} \right).$$

Припустимо, що при передачі деякої кількості теплоти газ розширюється і стовпчик води зміщується на деяку довжину Δl. Отже об'єм збільшується на $\Delta V = S\Delta l$, а тиск, навпаки, зменшується на $\rho g\Delta h$, де, як видно з малюнка,



$\Delta h = 2\Delta l \sin 30^\circ = \Delta l$. Тоді $\Delta P = \rho g \Delta l$. У вираз для теплоємності входить зміна температури у комбінації $(m/\mu)R\Delta T$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$\frac{m}{\mu} R\Delta T = \Delta(PV) = (P+\Delta P)(V+\Delta V) - PV = P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V \approx P\Delta V + V\Delta P ,$$

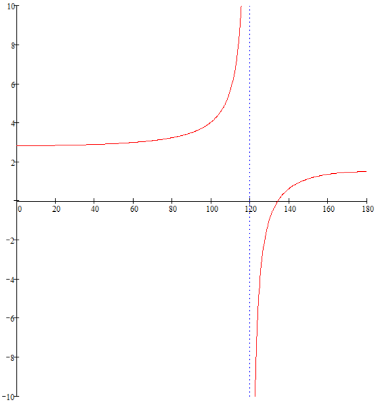
де враховано, що за умовою задачі зміни можна вважати малими. Тоді

$$c = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{P\Delta V}{P\Delta V + V\Delta P}\right) = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+\dfrac{V\Delta P}{P\Delta V}}\right) = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+\dfrac{\rho g V}{PS}}\right) = \frac{17}{6}\frac{R}{\mu}$$

$$c \approx 810 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Якщо тепер нахилити пляшку з трубкою на деякий кут α і знову розглянути невелике зміщення стовпчика води на Δl внаслідок передачі деякої кількості теплоти, єдиною відмінністю буде поява $\cos\alpha$ у виразі гідростатичного тиску. Тому з урахуванням умов задачі остаточний вираз для питомої теплоємності в залежності від кута нахилу набуває вигляду

$$c = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+\dfrac{\rho g V}{PS}\cos\alpha}\right) = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+2\cos\alpha}\right) .$$



Ця функція має розрив при α = 120º. Обернення теплоємності $c = \Delta Q / m\Delta T$ у нескінченність означає, що передача теплоти не призводить до зміни температури, тобто процес ізотермічний. Коли α = 90º, теплоємність повітря $c = 7R/2\mu$. Це значення теплоємності при сталому тиску, що зрозуміло, оскільки площина півкільця трубки горизонтальна і гідростатичний тиск ніяк себе не проявляє. На графіку вздовж осі ординат відкладено значення питомої теплоємності c в одиницях R/μ , вздовж осі абсцис – значення кута α в градусах. Незвично виглядає відрізок від'ємних значень c, що починається з кута $180^\circ - \arccos 0{,}7 \approx 134{,}4^\circ$, який відповідає нульовій теплоємності і адіабатному процесу. Насправді від'ємна теплоємність не є чимось унікальним. Достатньо сказати, що саме завдяки від'ємній теплоємності зірки не вибухають як термоядерні бомби, і ми з вами можемо обговорювати цю задачу при сонячному світлі. Якщо в надрах зірки випадково відбудеться збільшення енерговиділення, речовина не нагріється (що призвело б до ще більшого енерговиділення і врешті-решт ланцюгової реакції), а охолоне внаслідок роботи по розширенню.

Отже, різні кути нахилу такої простої конструкції, як пляшка з водяним затвором, демонструють різні відомі ізопроцеси.
Відзначимо також, що не всі положення пляшки з водяним затвором відповідають стану стійкої рівноваги. Обговорення застосування поняття теплоємності до нерівноважних процесів виходить за межі даної задачі.

Задача 11.2
Потенціал у плазмі змінюється з відстанню z від металевої пластини за законом

$\varphi = \varphi_0 \exp\left[-\frac{z}{r_D}\right]$ при z>0 і $\varphi = \varphi_0 \exp\left[\frac{z}{r_D}\right]$ при z<0;

r_D – відстань, на якій відбувається екранування пробного заряду у плазмі (радіус Дебая).
Густина струму, що протікає у напрямку до електроду,

$$j = en_0(\overline{u}_i - \overline{u}_e) , \qquad (1)$$

де u_i , u_e – середні швидкості спрямованого руху іонів та електронів відповідно; крім того, оскільки $e\varphi << kT$, то навіть поблизу електрода маємо $n_1 \approx n_e \approx n_0$.
Внаслідок того, що λ_i та λ_e – малі величини у порівнянні з характерними відстанями зміни потенціалу на довжині вільного пробігу, електричне поле можна вважати практично однорідним. Тому, розв'язуючи рівняння руху зарядженої частинки у однорідному електричному полі

$$m_e \frac{du_e}{dt} = -eE , \qquad (2)$$

отримуємо швидкість, що досягається за час між двома послідовними зіткненнями:

$u_e = -\frac{eE}{m_e}\tau_e$, а середня швидкість $\overline{u}_e = -\frac{eE}{2m_e}\tau_e$ (3)

Аналогічне співвідношення може бути отримане і для іонів. Величини τ_e та τ_i – середні часи між зіткненнями відповідно для електронів та іонів, які можуть бути визначені через довжину вільного пробігу та середню теплову швидкість. Оскільки $e\varphi << kT$, теплова швидкість значно перевищує спрямовану, і тому τ_e та τ_i визначаються лише тепловою швидкістю:

$$\tau_e = \frac{\lambda_e}{\overline{\upsilon_e}} , \qquad \tau_i = \frac{\lambda_i}{\overline{\upsilon_i}} , \qquad (4)$$

де $\overline{\upsilon_e}$ та $\overline{\upsilon_i}$ - середні швидкості теплового руху електронів та іонів

$$\overline{\upsilon_e} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} , \ \overline{\upsilon_i} = \sqrt{\frac{3kT}{m_i}} . \qquad (5)$$

З урахуванням (4 – 5) вирази для середніх значень спрямованих швидкостей матимуть вигляд:

$$\bar{u}_e = -\frac{eE\lambda_e}{2\sqrt{3m_e kT}}, \quad \bar{u}_i = \frac{eE\lambda_i}{2\sqrt{3m_i kT}} \qquad (6)$$

Напруженість електричного поля, що діє на частинку, буде

$$E = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi_0}{r_D}\exp\left[-\frac{z}{r_D}\right] \qquad (7)$$

Для частинок, які падають на електрод, $|z|\sim\lambda<<r_D$, тобто в нульовому наближенні отримаємо:

$$E \approx \varphi_0 / r_D \qquad (8)$$

Таким чином з урахуванням (6 – 8) маємо вираз для густини струму на електрод:

$$j = en_0(|u_i| + |u_e|) = \frac{n_0 e^2 \varphi_0}{2r_D\sqrt{3kT}}\left(\frac{\lambda_e}{\sqrt{m_e}} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{m_i}}\right) = \qquad (9)$$

$$= \varphi_0\sqrt{\frac{n_0^3}{6\varepsilon_0}\frac{e^3}{kT}}\left(\frac{\lambda_e}{\sqrt{m_e}} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{m_i}}\right)$$

Задача 11.3

При розв’язанні задачі скористаємося співвідношенням СТВ для частинки, яка вільно рухається: E = γmc^2, p = mυ , де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, E – енергія, p – імпульс,

υ – швидкість, m – маса частинки, c – швидкість світла у вакуумі.

За нульової маси нейтрино ці частинки віддаляються від наднової зірки зі швидкістю світла. Якщо ж маса нейтрино відмінна від нуля, то швидкість цих частинок тим менша, чим менша їх енергія. Зі збільшенням відстані від наднової, за рахунок такої різноманітності швидкостей, збільшується розкид часових моментів приходу частинок, випущених одночасно.

Вважаючи, що маса нейтрино відмінна від нуля, знайдемо розкид часових моментів приходу частинок із заданими енергіями. В загальному модуль швидкості частинок з масою m та енергією E визначається таким чином

$$\upsilon = \frac{c^2 p}{E} = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}.$$

Оскільки модуль імпульсу $p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}$,

знайдемо час прольоту нейтрино відстані L

$$t = \frac{L}{\upsilon} = \frac{L}{c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}} \; .$$

Тоді шуканий проміжок часу Δt між моментами прийому t_1 і t_2 одночасно випущених нейтрино

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E_2}\right)^2}}\right]$$

Отримаємо для нього наближений вираз згідно з формулою $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, справедливої для малих ε. В даному випадку малим параметром є $\varepsilon = -(mc^2/E^2)$, а показник ступені $n = -1/2$. Тому

$$t \approx \frac{L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2\right).$$

Другий доданок у дужках описує розкид часу з-за розкиду енергії. Через розкид енергії частинок

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{Lm^2}{2c}\left(\frac{c^4}{E_1^2} - \frac{c^4}{E_2^2}\right)$$

Отже, якщо маса нейтрино дорівнює нулю, то ніякої затримки між моментами прийому одночасно випущених нейтрино з різними енергіями не буде. Якщо ж нейтрино має ненульову масу, то для відстані L, яку задано часом розповсюдження світла в роках при $m \approx 10$ еВ/c^2, маємо $\Delta t \approx 2{,}5$ с.
Із виразу для Δt легко знайти масу в енергетичному еквіваленті:

$$mc^2 = \frac{E_1 E_2}{\sqrt{E_2^2 - E_1^2}}\sqrt{\frac{2\cdot c\Delta t}{L}} \; .$$

Задача 11.4

Кожна зоря у подвійній системі дає у фокальній площині об'єктива свою дифракційну картину, причому нульові максимуми цих картинок знаходяться на відстані ρ одна від одної (відстоять на кут ρ).
(1) → (1') → (1'') – хід променів від тієї компоненти подвійної зорі, на яку напрямлена головна оптична вісь об'єктиву (ГОВО), для яких максимум k-го порядку має вздовж осі OX координату $x_k^{\uparrow(1)}$ (координата т. F: $x = 0$).
З умови максимуму інтерференції:

$$\Delta = d\cdot \sin\varphi = 2k_1\cdot\lambda/2 \; (k \in \mathrm{Z}); \; x_k^{\uparrow(1)} = F\cdot tg\varphi.$$

$$x_k^{\uparrow(1)} \approx F\cdot\varphi \approx F\cdot sin\varphi = F\cdot\frac{k\cdot\lambda}{d}\ (n=1);\ \text{отже}\quad x_k^{\uparrow(1)} \approx F\cdot\frac{k_1\cdot\lambda}{d}. \qquad (1)$$

(2) → (2') → (2") – хід променів від другої компоненти. Для мінімумів інтерференції від цієї компоненти маємо:

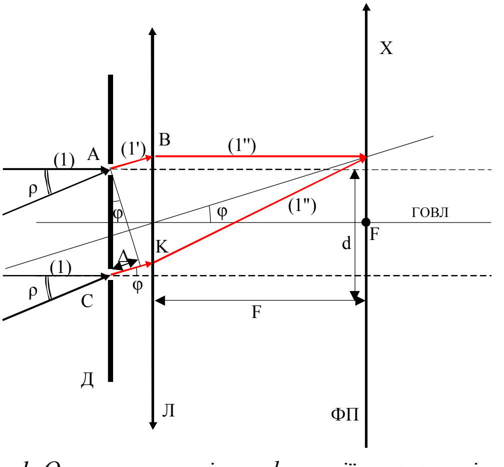
$$x_k^{\downarrow(2)} \approx F\cdot\left(\rho + \frac{2k_2 \pm 1}{2}\cdot\frac{\lambda}{d}\right). \qquad (2)$$

З умови мінімумів при падінні променів фронту Фраунгофера під кутом ρ до нормалі до решітки:

$d(\sin\varphi - \sin\rho) = \frac{2k_2 \pm 1}{2}\cdot\lambda$ ($k_2 \in$ Z), φ – кут, під яким спостерігаємо мінімум k_2-го порядку. Так, як φ та ρ малі, то $d(\varphi - \rho) \approx \frac{2k_2 \pm 1}{2}\cdot\lambda$. Тоді

$$\sin\varphi \cong \varphi \approx \frac{2k_2 \pm 1}{2d}\cdot\lambda + \rho. \qquad (3)$$

Умова розділення компонент (Критерій Релея): $x_k^{\downarrow(2)} = x_k^{\uparrow(1)}$. (4)



Мал. 1. Оптична схема інтерференції в телескопі

З (1 – 4): $F\cdot\left(\rho + \frac{2k_2 \pm 1}{2}\cdot\frac{\lambda}{d}\right) = F\cdot\frac{k_1\cdot\lambda}{d} \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{2d}\left|2k_1 - 2k_2 \pm 1\right|$. (5)

Перше співпадання дає: $\rho \approx \lambda/2d$. (6)

З (3) та умови задачі

$$\rho = \frac{5{,}55 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1{,}25} \approx 2{,}22 \cdot 10^{-7} \text{ рад} \approx 0{,}046''.$$

Знайдемо радіус просторової когерентності $r_{пк}$ для зірок подвійної системи на відстані L від системи. З теорії маємо:

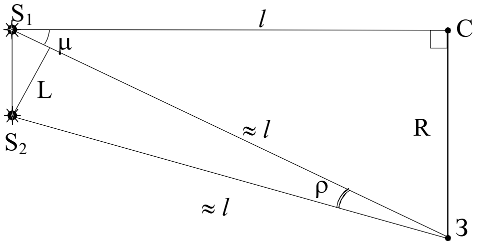
$r_{пк} \approx \lambda/\psi$, (7)

де ψ – кутовий поперечник зорі при її спостереженнях із Землі (кут, під яким видно зорю із Землі). Ясно, що $\psi < \rho/2$, тому маємо таку оцінку $r_{пк}$:

$r_{пк} \approx 2\lambda/\rho$. (8)

З (8) отримуємо: $r_{пк} \approx \dfrac{2 \cdot 5{,}55 \cdot 10^{-7}}{\dfrac{\pi \cdot 0{,}05}{180 \cdot 3600}} \approx 5{,}7\ м < d$,

отже наше припущення що до того, що промені (1) та (2) когерентні, є вірним.



Мал. 2. До визначення відстані до зірок та відстані між компонентами подвійної системи: С – Сонце, З – Земля, S_1, S_2 – зірки.

Знайдемо відстань від Землі до подвійної зорі:

$l = R / \mu$ (9)

З (6) та (9) знаходимо відстань між компонентами зоряної пари:

$$L = l \cdot \rho = \frac{\lambda R}{2d\mu}. \quad (10)$$

З (10) та умови задачі маємо: $L \approx 8{,}6 \cdot 10^7$ км.

Відповідь: $\rho \approx 0{,}046''$, $L \approx 8{,}6 \cdot 10^7$ км.

Зауваження:

1. Покажемо, що φ мале (*мал. 1*). З *мал. 1*

СД = $d \cdot \sin\varphi = k\lambda \le k_{max}\lambda$. (11)

Але k_{max} можна знайти, використовуючи той факт, що коли різниця ходу променів досягає значень порядку довжини когерентності $l_{ког}$, смуги стають нерозрізнюваними. Отже:

$k_{max}\lambda \approx l_{ког} \approx \lambda^2/\Delta\lambda$, звідси

$k_{max} \approx \lambda/\Delta\lambda$, (12)

Враховуючи (11) та (12), маємо

$$k_{\max} \approx \frac{5{,}6 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-9}} \approx 100$$

СД ≈ $\lambda^2/\Delta\lambda$ (13)

(в астрофізиці $\Delta\lambda \sim 5 \cdot 10^{-9}$ м). Тому sinφ мале і sinφ ≈ φ.

2. З умови задачі та (13)

СД ≈ k_{max} λ ≈ $100 \cdot 5{,}55 \cdot 10^{-7} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-5}$ м, що значно менше аніж відстань між діафрагмою та об'єктивом (прийнято, що СЛ ~ 10 см).

Задача 11.5

Відомо, що період малих коливань математичного маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L/g}\ , \tag{1}$$

а період малих коливань фізичного маятника

$$T_2 = 2\pi\sqrt{J/mgL}\ , \tag{2}$$

де J – момент інерції кульки щодо осі обертання, m – маса кульки, l – відстань від центру кульки до точки підвісу. За теоремою Штейнера

$$J = J_0 + ml^2\ , \tag{3}$$

Де $J_0 = 2/5mR^2$. (4)

Підставивши (3)-(4) до (2), отримаємо:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]}\ , \tag{5}$$

Звідки $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{1 + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{R}{l}\right)^2}$. (6)

Похибка δ, яку ми допустимо, припустивши, що підвішена на кульці нитка є математичним маятником, визначається таким чином:

$$\delta = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2} - 1\ , \tag{7}$$

Звідки $\dfrac{R}{l} = \sqrt{\dfrac{5}{2}\left[(1+\delta)^2 - 1\right]} \approx \sqrt{5\delta}$. (8)

За умовою δ ≤ 0,005, тоді з (8) знаходимо, що R/l ≤ 0,158.

Оскільки R = 0,03 м, то гранична відстань від центру кульки до точки підвісу l ≥ 0,19 м, а гранична довжина нитки L = l – R = 0,16 м = 16 см.