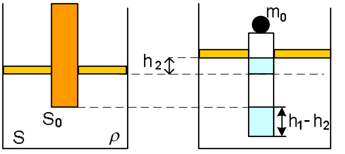
РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
8 клас

Задача 8.1

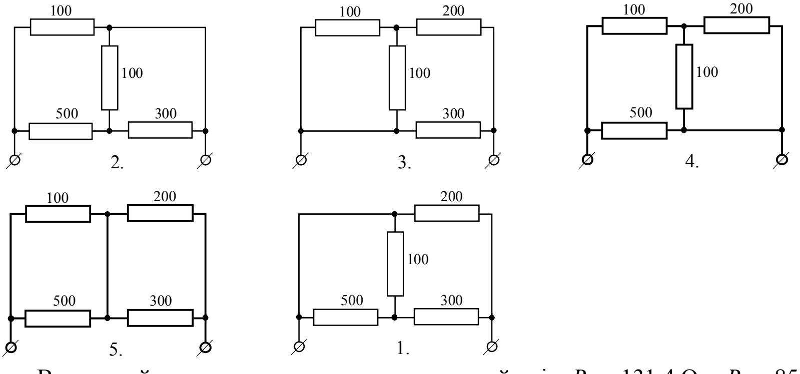


Коли на поверхню втулки поклали важок масою m_0, глибина її занурення збільшилася на h_1. При цьому втулка додатково витиснула масу рідини $m_0 = \rho \cdot S_0 \cdot h_1$ (*див. мал.*). Звідси $h_1 = m_0 / \rho \cdot S_0$. Збільшення глибини занурення втулки веде до підвищення рівня рідини в посудині на висоту h_2. Це підвищення рівня рідини можна визначити з рівності $m_0 = \rho \cdot S \cdot h_2$ (*див. рис.*), $h_2 = m_0 / \rho \cdot S$. Втулка відносно початкового положення зміститься на

$$\Delta x = h_1 - h_2 = m_0 \cdot (S - S_0)/(\rho \cdot S \cdot S_0)\ .$$

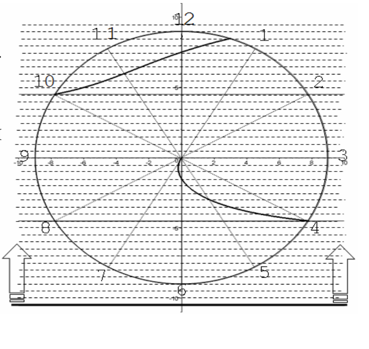
Задача 8.2

При замиканні одного з резисторів можливі п'ять варіантів з'єднання.



Виконаний розрахунок показує, що загальний опір: R_1 = 131,4 Ом; R_2 = 85,2 Ом; R_3 = 136,4 Ом; R_4 = 125 Ом; R_5 = 203,3 Ом. Отже, найменший опір між точками А і В буде у схемі 2, в результаті закорочування резистора з опором 200 Ом.

Задача 8.3



За умовою з малюнка зрозуміло, що зона сканування проходить три смуги за 5 с, а коло циферблата за 1 хв. Перша фіксація секундної стрілки станеться за 20 с після початку сканування коло цифри 4. Кінець фіксації тонкої частини секундної стрілки відбудеться на рівні середини циферблата через 35 с від початку сканування, через 15 с після цього біля числа 10 вістря стрілки знову дожене зону сканування і вийде з неї між цифрами 12 і 1 приблизно через 63 с від початку сканування. Малюнок задачі будується по точках (*див. мал.*).

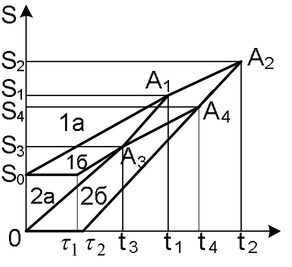
Задача 8.4

Нехай $C_к$ – теплоємність калориметра, $C_в = mc_в = 0{,}21$ кДж/°C – теплоємність початкової кількості води, t_1 – температура, яка встановилася в першому калориметрі. Тоді рівняння теплового балансу мають вигляд:

$C_к(t_1 - t_к) = C_в(t_в - t_1)$; (1) $C_k(t - t_k) = (C_в/2)(t_1 - t)$; (2)

Поділивши (1) на (2), отримаємо рівняння відносно t_1. Підставивши числові значення, отримаємо: $t_1 = 35\ ^0C$ (корінь $t_1 = 0$ не має фізичного змісту). Тоді з рівняння визначимо: $C_к = C_в(t_В - t_1)/(t_1 - t_к) = C_в = 0{,}21$ кДж/ ^0C

Задача 8.5



Розв'язок цієї задачі суттєво спрощується, якщо побудувати та проаналізувати графіки руху обох людей. За початок відліку часу приймаємо момент, коли автомобіліст виїжджає з пункту А. На той час велосипедист подолав деякий шлях S_0. Згідно з умовою задачі, зустріч відбулася після зупинок і не залежить від того, коли саме вони відбувались, тому умовно зображаємо їх на початку відліку. Пряма 1а є графіком запланованого руху велосипедиста, а пряма 1б – з зупинкою тривалості τ_1. Аналогічно пряма 2а є графіком запланованого руху автомобіліста, а 2б – з зупинкою тривалості τ_2. (*див.мал.*) Точці A_1 відповідає запланована зустріч, точці A_2 – зустріч, визначена автомобілістом, точці A_3 – зустріч, визначена велосипедистом, точці A_4 – справжня зустріч.

За умовою задачі $\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = 0{,}75$ год, $\Delta S_{31} = S_1 - S_3 = 45$ км, $\Delta t_{42} = t_2 - t_4 = 0{,}5$ год, $\Delta S_{43} = S_4 - S_3 = 30$ км.

Оскільки $A_1A_2A_4A_3$ є паралелограмом, то швидкість велосипедиста

$\upsilon_1 = \Delta S_{21} / \Delta t_{12} = \Delta S_{43} / \Delta t_{12} = 30$ км/0,75 год = 40 км/год,

а швидкість автомобіліста

$\upsilon_1 = \Delta S_{42} / \Delta t_{42} = \Delta S_{31} / \Delta t_{42} = 45$ км/0,5 год = 90км/год.

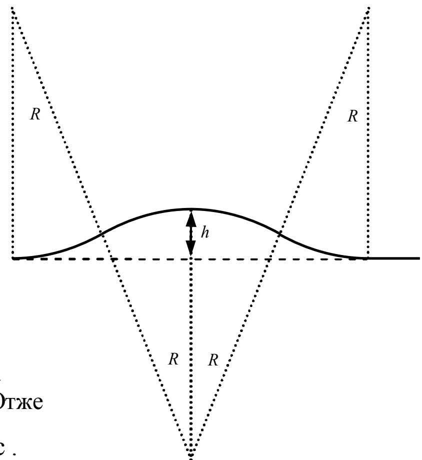
Задачу можна розв'язати і аналітично, зробіть це самостійно.

9 клас

Задача 9.1

1. Див. задача № 4, 8 клас.
2. Врахування втрат тепла приведе до зменшення розрахованого значення теплоємності. Це фізично зрозуміло: при нехтуванні втратами тепла ми, по суті, відносимо їх на рахунок теплоємності калориметра, і значення останньої виходить завищеним. Спробуйте це твердження показати розрахунком.

Задача 9.2



Нехай дуга кола має довжину l, а кут φ. Тоді $l = R\varphi$. З іншого боку, $h/2 = R(1-\cos\varphi)$, звідки, або за допомогою калькулятора, або з наближених формул можна знайти, що кут $\varphi = 0{,}02$ рад, а $l = 40$ м. Отже, довжина всієї гірки 160 м, або рівно половина довжини L = 320 м потягу з 20 вагонів по 16 м кожний. Коли гірка повністю заповнена вагонами, потяг переїжджає її зі сталою швидкістю υ , яку можна знайти із закону збереження енергії: $m\upsilon_0^2/2 = m\upsilon^2/2 + (1/2)mgh/2$,

де враховано, що на гірці знаходиться половина потягу, а висота центру мас цієї половини h/2. Отже

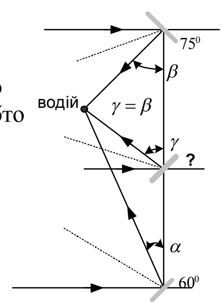
$$\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 + gh/2} > \sqrt{gh/2} = 2\ \text{м/с}\ .$$

Розглянемо тепер рівномірне перетікання вагонів через гірку з деякою сталою швидкістю υ. Тангенціальне прискорення вагонів дорівнює нулю. Отже, якщо спроектувати другий закон Ньютона для вагона, який підіймається під кутом α до горизонту, на напрямок його руху, матимемо, що різниця сил натягу ΔT спрямована вздовж схилу вгору і дорівнює проекції сили тяжіння $\Delta mg\sin\alpha$,

або $\Delta T = \Delta mg\sin\alpha = (mg/L)\Delta l\sin\alpha = (mg/L)\Delta h$, де Δl – довжина вагону,

Δh – проекція довжини вагона на вертикальну вісь, m = 500 т – маса всього потягу. Якщо додати аналогічні вирази для всіх вагонів, що знаходяться з одного боку гірки, знайдемо $T_\uparrow - T_\downarrow = mgh/L$, де сила натягу у найнижчій точці гірки $T_\downarrow = 0$, оскільки горизонтальна дільниця вагонів рухається без прискорення. Тоді сила натягу у найвищій точці $T_\uparrow = mgh/L = 12{,}5$ кН.

Задача 9.3

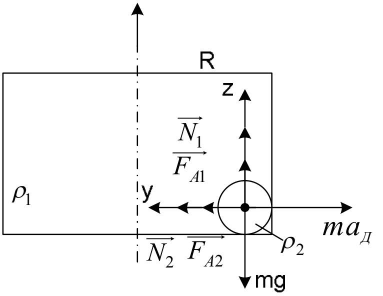


Будемо вважати, що водій знаходиться посередині лівої половини автобуса, а внутрішнє дзеркало знаходиться посередині автобуса. Тоді, з міркувань симетрії, зрозуміло, що внутрішнє дзеркало розташоване так само, як і ліве (γ = β), тобто утворює з напрямом руху кут 75º. За півхвилини відстань між водієм і пішоходом збільшиться до $S = (\upsilon_0 - \upsilon)\,t = 225$ м.

Перед поворотом зображення буде віддалятись від водія зі швидкістю $u_1 = \upsilon_0 - \upsilon = 27$ км/год. Безпосередньо на початку повороту зображення отримає перпендикулярну складову швидкості, що пов’язана з обертанням дзеркала (автобуса) навколо вертикальної вісі $\omega = \upsilon_0/R$. Якщо знехтувати відстанню від водія до дзеркала, перпендикулярна складова швидкості дорівнює: $u_2 = \omega S = (\upsilon_0 / R)(\upsilon_0 - \upsilon)t$. Тоді, швидкість зображення

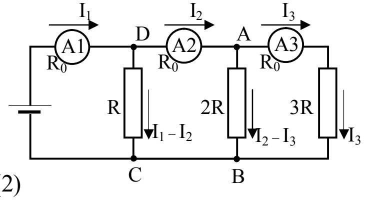
$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = (\upsilon_0 - \upsilon)\sqrt{1 + (\upsilon_0 t / R)^2} \approx 125\,\text{км/год}$$

Задача 9.4



Перейдемо у неінерціальну систему відліку (НеІСВ), що обертається з кутовою швидкістю ω . У цій СВ рідина і тіло нерухомі. За принципом еквівалентності Ейнштейна неінерціальність СВ можна замінити додатковим локальним гравітаційним полем (з напруженістю $\vec{g_1} = -\vec{a_Д}$), яке в межах посудини неоднорідне, але в околі кульки його можна вважати однорідним, оскільки r << R. Розглянемо сили, що діють на кульку (*див. мал.*). N_1, N_2 – сили реакції стінок, mg – сила тяжіння, що пов'язана з полем тяжіння Землі, F_{A1} – сила Архімеда по'язана з g, F_{A2} – сила Архімеда (пов'язана з додатковим гравітаційним полем), $ma_Д$ – сила тяжіння у додатковому гравітаційному полі. Запишемо умову рівноваги тіла по вісі ОУ: $N_2 + F_{A2} = ma_Д \Rightarrow$ $N_2 = ma_Д - F_{A2} = \rho_2 V\omega^2(R-r) - \rho_1\omega^2(R-r)V = (\rho_2 - \rho_1)\omega^2 R(4/3)\pi r^3$. Враховано, що R >> r.

Задача 9.5



Нехай опір амперметра R_0.
Можна записати: $U_{AB} = I_3\cdot(3\cdot R + R_0)$;
$I_2 = I_3 + I_3 \cdot (3R + R_0)/2R$ (1)
Напруга між точками C і D дорівнює
$U_{CD} = U_{AB} + I_2\cdot R_0 = I_3\cdot(3\cdot R + R_0) + I_2\cdot R_0$,
отже: $I_1 = I_2 + (I_3 \cdot (3R + R_0) + I_2 \cdot R_0)/R$ (2)

З (1) отримуємо $R_0 / R = 2 \cdot I_2 / I_3 - 5$ (3) З (2) отримуємо

$I_1 = I_2 + 3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_0 / R + I_2 \cdot R_0 / R$ (4)

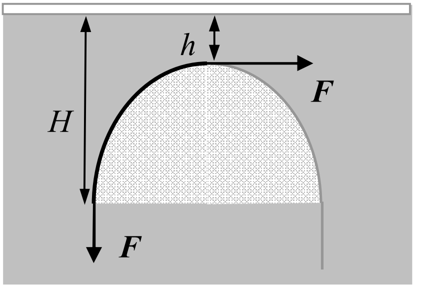
Підставимо (3) в (4): $2I_2^2 - 2 \cdot I_3 \cdot I_2 - (2I_3 + I_1) \cdot I_3 = 0$,

звідки $I_2 = \dfrac{I_3 + \sqrt{I_3^2 + 2I_3(2I_3 + I_1)}}{2} = 3\ мА$.

10 клас

Задача 10.1

Тиск у приміщенні дорівнює тиску води на глибині H, тобто $P = P_A + \rho g H \approx 135$ кПа . Оскільки сили тиску діють перпендикулярно до поверхні плівки, сила натягу плівки всюди однакова і дорівнює F. Розглянемо половину плівки (*див. мал.*). На неї діють дві сили натягу, сила повітряного тиску зсередини приміщення і сила гідростатичного тиску ззовні. Враховуючи те, що з глибиною сила тиску змінюється лінійно, запишемо проекцію умови рівноваги плівки на горизонтальний напрямок: $\left(P_A + \rho g(H+h)/2\right)\left(H-h\right)l + F = \left(P_A + \rho g H\right)\left(H-h\right)l$,



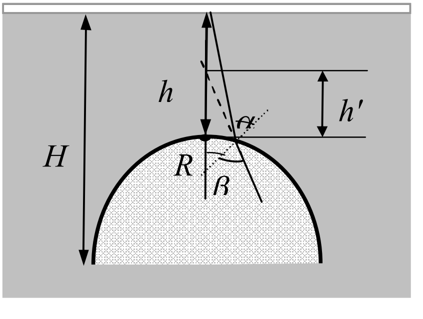
звідки знаходимо $F = (1/2)\rho g l\left(H-h\right)^2 \approx 500$ кН , або для коефіцієнта поверхневого натягу плівки $\sigma = F/l = (1/2)\rho g \Delta H^2 \approx 31$ кН/м .

Замість проекції умови рівноваги плівки на вертикальний напрямок зручніше скористатися тим, що дві сили натягу 2F утримують великий об'єм повітря, на який діє сила Архімеда $\rho g V$ (масою повітря нехтуємо і внаслідок значної довжини l = 16 м приміщення нехтуємо особливостями на торцях). Отже об'єм повітря всередині приміщення: $V = 2F/\rho g = \Delta H^2 l = 100$ м^3 .

Звичайно, ці ж самі результати можна отримати за допомогою інтегрування.

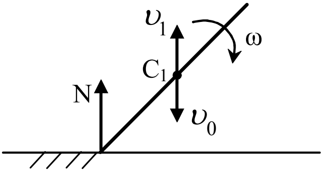
За умовою задачі необхідно знайти об'єм повітря V_0 , що нагнітався з поверхні води. Знайдений нами об'єм V знаходиться під тиском $P = P_A + \rho g H \approx 135$ кПа . Вважаємо, що температури повітря на поверхні води і всередині приміщення однакові або мало відрізняються. Тоді $V_0 = PV/P_A \approx 135$ м^3 .

Додаткова відповідь. Внаслідок симетрії задачі, зрозуміло, що розміри зображення кільця будуть максимально відрізнятися у взаємоперпендикулярних напрямках, один з яких проходить вздовж приміщення. Знайдемо спочатку радіус кривизни плівки у перпендикулярній до цього напрямку площині для найвищої точки куполу. Найпростіше це зробити, застосувавши формулу Лапласа для різниці тисків з двох сторін викривленої поверхні. В нашому випадку маємо $P - \left(P_A + \rho g h\right) = \sigma / R$ (другий радіус кривизни дорівнює нескінченності), звідки знаходимо $R = \sigma / \rho g \Delta H = \Delta H / 2$.



Розглянемо хід променів від точки на поверхні води крізь плівку в око спостерігачеві. Отримуємо, що зображення наблизиться до найвищої точки куполу на відстань $h' = h/n + (n-1)h/R$. У перпендикулярному напрямку ($R \to \infty$) ця відстань буде більшою $h'' = h/n$. Співставляємо відстані з кутовими розмірами і знаходимо відповідь на питання задачі.

Задача 10.2



Мал. 1

Спочатку встановимо наслідки пружного удару гантелі об виступ. Нехай перед ударом центр мас гантелі має швидкість υ_0 (*мал. 1*), а після удару центр мас матиме швидкість υ_1, а гантель – кутову швидкість ω. Згідно з теоремою про зміну імпульсу та теоремою про зміну моменту імпульсу, маємо систему двох рівнянь: $m(\upsilon_0 + \upsilon_1) = \tau P$, $I_C \omega = \tau PL/2\cos\alpha$.

Враховуючи, що $I_C = mL^2/8$, з цієї системи знаходимо $\omega = (4/L)(\upsilon_0 + \upsilon_1)\cos\alpha$. (1)

Удар абсолютно пружний, тому можна вважати, що кінетична енергія гантелі зберігається: $m\upsilon_0^2/2 = m\upsilon_1^2/2 + I_C\omega^2/2$,

Звідки з урахуванням (1) випливає

$$\upsilon_0^2 - \upsilon_1^2 = 2(\upsilon_0 + \upsilon_1)^2\cos^2\alpha . \quad (2)$$

З (2) за умови, що $\alpha = \pi/4$, випливає

$$\upsilon_1 = \frac{1 - 2\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^2\alpha}\upsilon_0 = 0 . \quad (3)$$

Тоді згідно (1)

$$\omega = \cos\alpha \frac{4}{L}\upsilon_0 = \frac{2\sqrt{2}}{L}\upsilon_0 . (4)$$

Так, як час падіння після удару (*мал. 2*) $t_{12} = \sqrt{2H/3}$ і за цей час гантель повернеться на кут $5\pi/2$, то

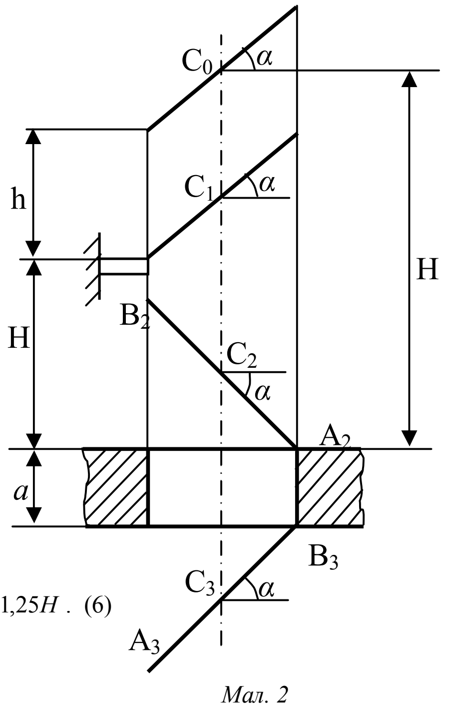
$$\omega = 5\pi/2t_{12} = (5\pi/2)\sqrt{g/2H} . \quad (5)$$

Тоді, згідно з (4),

$$\upsilon_0 = \omega L/2\sqrt{2} = (5\pi L/8)\sqrt{g/H} ,$$

$h = \upsilon_0^2/2g = (\pi/8)^2 H$ Отже,

$$H_0 = H + h + (L/2)\sin\alpha = \left[1{,}1 + (\pi/8)^2\right]H \approx 1{,}25H . \quad (6)$$



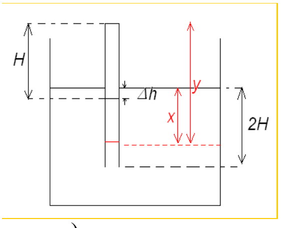
Мал. 2

При максимальному a гантель додатково повернеться на кут π/2. Тому час її падіння до виходу з щілини $t_{13} = 3\pi/\omega = (6/5)\sqrt{2H/g}$.

Отже, максимальне значення товщини стінки:

$a = gt_{13}^2/2 - H - L\sin\alpha = (6/25)H = 0{,}24H$. (7)

Задача 10.3



1)T_1 = 273 K. Тиск у верхній частині труби визначається тільки тиском повітря і дорівнює:

$P_1 = P_{атм} + \rho g\Delta h$ (1)

2) T_2 = 373K. Тепер тиск у верхній частині трубки дорівнює сумі тисків повітря і насиченої пари (закон Дальтона):

$P_2 = P_{повітря} + P_{нас.пари} = P_{атм} + \rho gx$, (2)

де x – положення рівня води у трубці при T_2 відносно вільної поверхні води.

Оскільки $P_{нас.пари} = P_{атм}$ при 373 K, то з (2) $P_{повітря} = \rho gx$ (3)

3) Застосовуючи об'єднаний газовий закон для повітря, отримуємо (з (1) та (3)):

PV/T = const, $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2 \Rightarrow ((P_{атм} + \rho g\Delta h)/T_1)HS = (\rho gx/T_2)Sy$, (4)

де y – довжина стовпчика повітря і пари при T_2, $y = x + H - \Delta h$. (5)

Підставивши числові значення, з (4) отримаємо: $13{,}7 = x^2 + 0{,}7x \Rightarrow x = 3{,}35$ м.

4) Цілком зрозуміло, що значення (3,35 м > 3 H) – більше, ніж повна довжина трубки 2,7 м, а, значить, повітря, досягнувши краю трубки, повністю витіснить з неї воду і вийде назовні у вигляді бульбашок.

Тобто при T_2 рівень води буде знаходитись на глибині 2H (там, де і кінець трубки).

5) При наступному охолодженні до T_1 рівень води в трубці не повинен повернутись до значення Δh, адже певна маса повітря вийшла, а тиск насиченої пари знову став малим. Ще раз скористаємось об'єднаним газовим законом:

T_2: $P_2^{|} = \rho g 2H$; $V_2^{|} = (3H - \Delta h)S$; (8)

T_1: $P_1^{|} = P_{atm} + \rho gz$; $V_1^{|} = (H - \Delta h + z)S$; (9)

З використанням (8) і (9), PV/T = const:

$$\frac{\rho g 2H(3H-\Delta h)S}{T_2} = \frac{(P_{атм}+\rho g z)(H-\Delta h+z)}{T_1} \qquad (10)$$

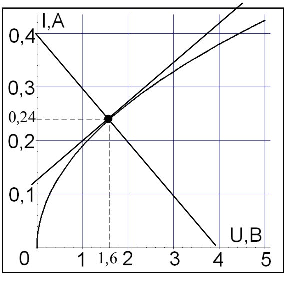
Підставивши числові значення, отримаємо:

$z_1 = -10{,}4$ м; $\qquad$ $z_2 = -0{,}3$ м.

Оскільки $|z| \le 3H$, то перший корінь не підходить. Оскільки другий корінь від'ємний, то рівень води при охолодженні буде вище вільної поверхні води на 30 см і на 60 см вище початкового рівня.

Задача 10.4

а) Сила струму *I*, який проходить через лампу, і напруга *U* на ній пов'язані залежністю, показаною на *мал*. в умові задачі. Але при вмиканні лампи в коло сила струму і напруга виявляються зв'язаними ще одним співвідношенням: $U + I{\cdot}R = \varepsilon$. Зрозуміло, що коли побудувати цю графічну залежність, то точка перетину її з вольтамперною характеристикою лампи визначить значення *U* і *I*. Виконавши вказану побудову (*див. мал.*) знайдемо: $I = 0{,}24$ А, U = 1,6 В.



б) Щоб напруга U_{AB} між точками A і B дорівнювала нулю, треба так встановити повзунок потенціометра, щоб виконувалася рівність $U_{CB} = U_{R1} = U_{CA} = 1{,}6$ В. Отже, відношення опорів R_1 і R_2 "плеч" потенціометра ($r_1 + r_2 = r$) повинно задовольняти умові:

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{U_{r1}}{U_{r2}} = \frac{U_{CA}}{\varepsilon - U_{CA}}$, $\quad$ звідки $\quad r_1 = 16$ Ом, $r_2 = 24$ Ом.

в) Щоб при малій зміні ЕРС ε батареї напруга U_{AB} майже не змінювалася, треба так підібрати плечі потенціометра, щоб напруга на лівому плечі (r_x) була такою самою, як зміна напруги на лампі.

При зміні ЕРС на малу величину $\Delta\varepsilon$ напруга U_{CA} на лампі змінюється поблизу "робочої точки" (1,6 В) на малу величину $\Delta U_{CA} = \Delta\varepsilon - \Delta I{\cdot}r$,

де ΔI – зміна сили струму в лампі при малій зміні ΔU_{CA}. З'ясуємо, як залежить ΔI від ΔU_{CA}. Відношення $\Delta I / \Delta U_{CA}$ поблизу робочої точки дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіку функції $I(U_{CA})$ в робочій точці: $\Delta I / \Delta U_{CA} = k$.

Побудувавши дотичну, знайдемо k ≈ 0,08 (*мал.*), так що $\Delta I = \Delta U_{CA}{\cdot}k \approx 0{,}08\,\Delta U_{CA}$.

Отже $\Delta U_{CA} = \Delta\varepsilon - \Delta U_{CA}{\cdot}k{\cdot}r$, звідки $\Delta U_{CA} = \Delta\varepsilon/(1 + k\cdot R)$.

Напруга U_{CB} на лівому плечі потенціометра з опором r_x дорівнює $U_{CB} = (r_x/r)\cdot\varepsilon$; при зміні ЕРС на мале значення Δε напруга U_{CB} змінюється на значення $\Delta U_{CB} = (r_x/r)\cdot\Delta\varepsilon$. Прирівнявши ΔU_{CA} і ΔU_{CB} , дістанемо: $\quad r_x = r/(1 + k\cdot R)$

Підставивши числові значення, знайдемо $r_x \approx 22$ Ом, $r - r_x \approx 18$ Ом.

При цьому $U_{AB} \approx 0{,}6$ В, при зміні ЕРС ε в межах ±1 В значення U_{AB} змінюється менше ніж на 0,03 В.

Задача 10.5

При русі по параболічній траєкторії повна механічна енергія космічного корабля:

$$m \cdot \upsilon^2 / 2 - G \cdot M \cdot m / r = 0.$$

Тому швидкість корабля безпосередньо перед гальмуванням (у вершині параболи):

$$\upsilon_{\text{п}} = \sqrt{2GM_{\text{м}} / R_{\text{м}}} = \sqrt{2g_{\text{м}} R_{\text{м}}}.$$

Після переходу на колову орбіту швидкість корабля визначається з умови $a_{\text{доц}} = \upsilon_{\text{к}}^2 / R_{\text{м}} = g_{\text{м}}$, тому $\upsilon_{\text{к}} = \sqrt{g_{\text{м}} R_{\text{м}}}$. Таким чином швидкість при короткочасному гальмуванні повинна зменшитись у $\sqrt{2}$ разів або на

$$\Delta\upsilon = \upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{к}} = \sqrt{g_{\text{м}} R_{\text{м}}} \left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{1{,}7 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6} \left(1{,}41 - 1\right) м/с \approx 7 \cdot 10^2\, м/с = 0{,}7 км/с .$$

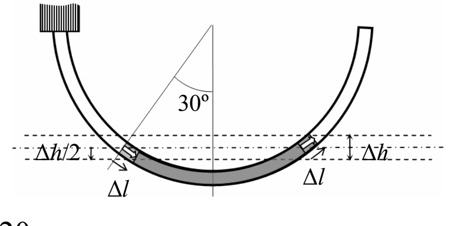
Радіус кривини траєкторії за час гальмування зменшиться у стільки ж разів, у скільки зменшиться квадрат швидкості, бо нормальне (доцентрове) прискорення до і після гальмування визначається силою гравітаційного притягання до Місяця і дорівнює $a_{\text{доц}} = g_{\text{м}} = F_{грав} / m$. Оскільки після гальмування радіус траєкторії стане рівним $R_{\text{м}}$, радіус кривини параболи в її вершині безпосередньо перед гальмуванням дорівнюватиме $R_{\text{п}} = 2R_{\text{м}}$. Таким чином радіус кривини траєкторії зменшиться на $\Delta R = R_{\text{п}} - R_{\text{м}} = R_{\text{м}} = 1740\ км$

11 клас

Задача 10.1

За означенням питома теплоємність c – це кількість теплоти, яку слід передати одиниці маси речовини, щоб нагріти її на один градус. З урахуванням першого закону термодинаміки і того, що повітря переважно складається з двохатомних газів азоту і кисню, отримаємо

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} = \left(P\Delta V + \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T \right) \Big/ m\Delta T = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu} + \frac{P\Delta V}{m\Delta T} = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{P\Delta V}{\dfrac{m}{\mu} R\Delta T} \right).$$



Припустимо, що при передачі деякої кількості теплоти газ розширюється і стовпчик води зміщується на деяку довжину Δl . Отже об'єм збільшується на $\Delta V = S\Delta l$, а тиск, навпаки, зменшується на $\rho g \Delta h$, де, як видно з малюнка,

$\Delta h = 2\Delta l \sin 30^\circ = \Delta l$. Тоді $\Delta P = \rho g \Delta l$. У вираз для теплоємності входить зміна температури у комбінації $(m/\mu)R\Delta T$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$\frac{m}{\mu}R\Delta T = \Delta(PV) = (P+\Delta P)(V+\Delta V) - PV = P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V \approx P\Delta V + V\Delta P ,$$

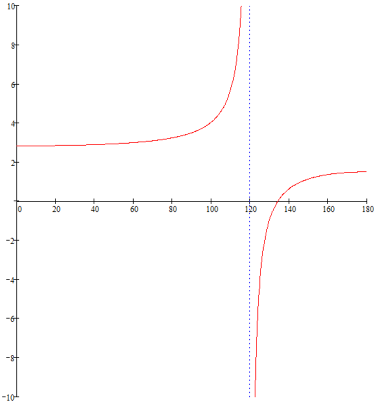
де враховано, що за умовою задачі зміни можна вважати малими. Тоді

$$c = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{P\Delta V}{P\Delta V + V\Delta P}\right) = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+\dfrac{V\Delta P}{P\Delta V}}\right) = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+\dfrac{\rho g V}{PS}}\right) = \frac{17}{6}\frac{R}{\mu}$$

$$c \approx 810\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$$

Якщо тепер нахилити пляшку з трубкою на деякий кут α і знову розглянути невелике зміщення стовпчика води на Δl внаслідок передачі деякої кількості теплоти, єдиною відмінністю буде поява $\cos\alpha$ у виразі гідростатичного тиску. Тому з урахуванням умов задачі остаточний вираз для питомої теплоємності в залежності від кута нахилу набуває вигляду

$$c = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+\dfrac{\rho g V}{PS}\cos\alpha}\right) = \frac{R}{\mu}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1+2\cos\alpha}\right) .$$



Ця функція має розрив при α = 120º. Обернення теплоємності $c = \Delta Q / m\Delta T$ у нескінченність означає, що передача теплоти не призводить до зміни температури, тобто процес ізотермічний. Коли α = 90º, теплоємність повітря $c = 7R/2\mu$. Це значення теплоємності при сталому тиску, що зрозуміло, оскільки площина півкільця трубки горизонтальна і гідростатичний тиск ніяк себе не проявляє. На графіку вздовж осі ординат відкладено значення питомої теплоємності *c* в одиницях R/μ , вздовж осі абсцис – значення кута α в градусах. Незвично виглядає відрізок від'ємних значень *c*, що починається з кута $180^\circ - \arccos 0{,}7 \approx 134{,}4^\circ$, який відповідає нульовій теплоємності і адіабатному процесу. Насправді від'ємна теплоємність не є чимось унікальним. Достатньо сказати, що саме завдяки від'ємній теплоємності зірки не вибухають як термоядерні бомби, і ми з вами можемо обговорювати цю задачу при сонячному світлі. Якщо в надрах зірки випадково відбудеться збільшення енерговиділення, речовина не нагріється (що призвело б до ще більшого енерговиділення і врешті-решт ланцюгової реакції), а охолоне внаслідок роботи по розширенню.

Отже, різні кути нахилу такої простої конструкції, як пляшка з водяним затвором, демонструють різні відомі ізопроцеси.
Відзначимо також, що не всі положення пляшки з водяним затвором відповідають стану стійкої рівноваги. Обговорення застосування поняття теплоємності до нерівноважних процесів виходить за межі даної задачі.

Задача 11.2
Потенціал у плазмі змінюється з відстанню z від металевої пластини за законом

$\varphi = \varphi_0 \exp\left[-\frac{z}{r_D}\right]$ при z>0 і $\varphi = \varphi_0 \exp\left[\frac{z}{r_D}\right]$ при z<0;

r_D – відстань, на якій відбувається екранування пробного заряду у плазмі (радіус Дебая).
Густина струму, що протікає у напрямку до електроду,

$$j = en_0(\overline{u}_i - \overline{u}_e) , \qquad (1)$$

де u_i , u_e – середні швидкості спрямованого руху іонів та електронів відповідно; крім того, оскільки $e\varphi << kT$, то навіть поблизу електрода маємо $n_1 \approx n_e \approx n_0$.
Внаслідок того, що λ_i та λ_e – малі величини у порівнянні з характерними відстанями зміни потенціалу на довжині вільного пробігу, електричне поле можна вважати практично однорідним. Тому, розв'язуючи рівняння руху зарядженої частинки у однорідному електричному полі

$$m_e \frac{du_e}{dt} = -eE , \qquad (2)$$

отримуємо швидкість, що досягається за час між двома послідовними зіткненнями:

$$u_e = -\frac{eE}{m_e}\tau_e, \text{ а середня швидкість } \overline{u}_e = -\frac{eE}{2m_e}\tau_e \qquad (3)$$

Аналогічне співвідношення може бути отримане і для іонів. Величини τ_e та τ_i – середні часи між зіткненнями відповідно для електронів та іонів, які можуть бути визначені через довжину вільного пробігу та середню теплову швидкість. Оскільки $e\varphi << kT$, теплова швидкість значно перевищує спрямовану, і тому τ_e та τ_i визначаються лише тепловою швидкістю:

$$\tau_e = \frac{\lambda_e}{\overline{\upsilon_e}}, \qquad \tau_i = \frac{\lambda_i}{\overline{\upsilon_i}}, \qquad (4)$$

де $\overline{\upsilon_e}$ та $\overline{\upsilon_i}$ - середні швидкості теплового руху електронів та іонів

$$\overline{\upsilon_e} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} , \ \overline{\upsilon_i} = \sqrt{\frac{3kT}{m_i}} . \qquad (5)$$

З урахуванням (4 – 5) вирази для середніх значень спрямованих швидкостей матимуть вигляд:

$$\bar{\mathrm{u}}_e = -\frac{eE\lambda_e}{2\sqrt{3m_e kT}}, \quad \bar{\mathrm{u}}_i = \frac{eE\lambda_i}{2\sqrt{3m_i kT}} \qquad (6)$$

Напруженість електричного поля, що діє на частинку, буде

$$E = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi_0}{r_D}\exp\left[-\frac{z}{r_D}\right] \qquad (7)$$

Для частинок, які падають на електрод, $|z| \sim \lambda << r_D$, тобто в нульовому наближенні отримаємо:

$$E \approx \varphi_0 / r_D \qquad (8)$$

Таким чином з урахуванням (6 – 8) маємо вираз для густини струму на електрод:

$$j = en_0(|\mathrm{u_i}| + |\mathrm{u_e}|) = \frac{n_0 e^2 \varphi_0}{2r_D\sqrt{3kT}}\left(\frac{\lambda_e}{\sqrt{m_e}} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{m_i}}\right) = \qquad (9)$$

$$= \varphi_0\sqrt{\frac{n_0^3}{6\varepsilon_0}\frac{e^3}{kT}}\left(\frac{\lambda_e}{\sqrt{m_e}} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{m_i}}\right)$$

Задача 11.3

При розв'язанні задачі скористаємося співвідношенням СТВ для частинки, яка вільно рухається: E = γmc^2, p = mυ, де $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, E – енергія, p – імпульс,

υ – швидкість, m – маса частинки, c – швидкість світла у вакуумі.

За нульової маси нейтрино ці частинки віддаляються від наднової зірки зі швидкістю світла. Якщо ж маса нейтрино відмінна від нуля, то швидкість цих частинок тим менша, чим менша їх енергія. Зі збільшенням відстані від наднової, за рахунок такої різноманітності швидкостей, збільшується розкид часових моментів приходу частинок, випущених одночасно.

Вважаючи, що маса нейтрино відмінна від нуля, знайдемо розкид часових моментів приходу частинок із заданими енергіями. В загальному модуль швидкості частинок з масою m та енергією E визначається таким чином

$$\upsilon = \frac{c^2 p}{E} = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}.$$

Оскільки модуль імпульсу $p = \dfrac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}$,

знайдемо час прольоту нейтрино відстані L

$$t = \frac{L}{\upsilon} = \frac{L}{c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}} .$$

Тоді шуканий проміжок часу Δt між моментами прийому t_1 і t_2 одночасно випущених нейтрино

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E_2}\right)^2}}\right]$$

Отримаємо для нього наближений вираз згідно з формулою $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, справедливої для малих ε. В даному випадку малим параметром є $\varepsilon = -(mc^2/E^2)$, а показник ступені $n = -1/2$. Тому

$$t \approx \frac{L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2\right).$$

Другий доданок у дужках описує розкид часу з-за розкиду енергії. Через розкид енергії частинок

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{Lm^2}{2c}\left(\frac{c^4}{E_1^2} - \frac{c^4}{E_2^2}\right)$$

Отже, якщо маса нейтрино дорівнює нулю, то ніякої затримки між моментами прийому одночасно випущених нейтрино з різними енергіями не буде. Якщо ж нейтрино має ненульову масу, то для відстані L, яку задано часом розповсюдження світла в роках при $m \approx 10$ еВ/c^2, маємо $\Delta t \approx 2{,}5$ с.

Із виразу для Δt легко знайти масу в енергетичному еквіваленті:

$$mc^2 = \frac{E_1 E_2}{\sqrt{E_2^2 - E_1^2}}\sqrt{\frac{2\cdot c\Delta t}{L}} .$$

Задача 11.4

Кожна зоря у подвійній системі дає у фокальній площині об'єктива свою дифракційну картину, причому нульові максимуми цих картинок знаходяться на відстані ρ одна від одної (відстоять на кут ρ).

(1) → (1') → (1'') – хід променів від тієї компоненти подвійної зорі, на яку напрямлена головна оптична вісь об'єктиву (ГОВО), для яких максимум k-го порядку має вздовж осі OX координату $x_k^{\uparrow(1)}$ (координата т. F: $x = 0$).

З умови максимуму інтерференції:

$$\Delta = d\cdot sin\varphi = 2k_1\cdot\lambda/2 \ (k \in \mathrm{Z});\ x_k^{\uparrow(1)} = F\cdot tg\varphi.$$

$$x_k^{\uparrow(1)} \approx F\cdot\varphi \approx F\cdot sin\varphi = F\cdot\frac{k\cdot\lambda}{d}\ (n=1);\ \text{отже}\quad x_k^{\uparrow(1)} \approx F\cdot\frac{k_1\cdot\lambda}{d}. \qquad (1)$$

(2) → (2') → (2") – хід променів від другої компоненти. Для мінімумів інтерференції від цієї компоненти маємо:

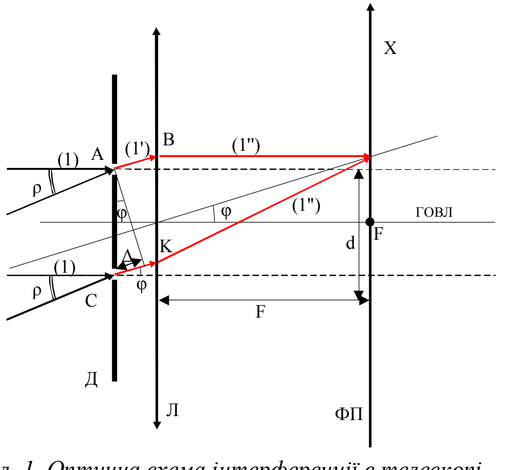
$$x_k^{\downarrow(2)} \approx F\cdot\left(\rho+\frac{2k_2\pm1}{2}\cdot\frac{\lambda}{d}\right). \qquad (2)$$

З умови мінімумів при падінні променів фронту Фраунгофера під кутом ρ до нормалі до решітки:

$d(\sin\varphi-\sin\rho)=\frac{2k_2\pm1}{2}\cdot\lambda$ ($k_2 \in Z$), φ – кут, під яким спостерігаємо мінімум k_2-го порядку. Так, як φ та ρ малі, то $d(\varphi-\rho)\approx\frac{2k_2\pm1}{2}\cdot\lambda$. Тоді

$$\sin\varphi \cong \varphi \approx \frac{2k_2\pm1}{2d}\cdot\lambda+\rho. \qquad (3)$$

Умова розділення компонент (Критерій Релея): $x_k^{\downarrow(2)} = x_k^{\uparrow(1)}$. (4)



Мал. 1. Оптична схема інтерференції в телескопі

З (1 – 4): $F\cdot\left(\rho+\frac{2k_2\pm1}{2}\cdot\frac{\lambda}{d}\right)=F\cdot\frac{k_1\cdot\lambda}{d} \Rightarrow \rho=\frac{\lambda}{2d}\left|2k_1-2k_2\pm1\right|$. (5)

Перше співпадання дає: $\rho\approx\lambda/2d$. (6)

З (3) та умови задачі

$$\rho = \frac{5{,}55 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1{,}25} \approx 2{,}22 \cdot 10^{-7} \text{ рад} \approx 0{,}046''.$$

Знайдемо радіус просторової когерентності $r_{пк}$ для зірок подвійної системи на відстані L від системи. З теорії маємо:

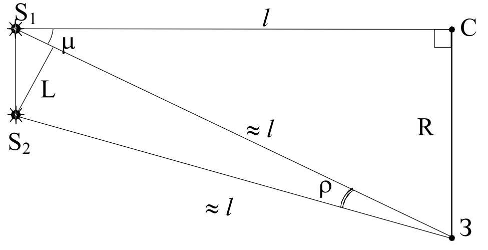
$r_{пк} \approx \lambda/\psi,$ (7)

де ψ – кутовий поперечник зорі при її спостереженнях із Землі (кут, під яким видно зорю із Землі). Ясно, що $\psi < \rho/2$, тому маємо таку оцінку $r_{пк}$:

$r_{пк} \approx 2\lambda/\rho.$ (8)

З (8) отримуємо: $r_{пк} \approx \dfrac{2 \cdot 5{,}55 \cdot 10^{-7}}{\dfrac{\pi \cdot 0{,}05}{180 \cdot 3600}} \approx 5{,}7 \text{ м} < d$,

отже наше припущення що до того, що промені (1) та (2) когерентні, є вірним.



Мал. 2. До визначення відстані до зірок та відстані між компонентами подвійної системи: С – Сонце, З – Земля, S_1, S_2 – зірки.

Знайдемо відстань від Землі до подвійної зорі:

$l = R / \mu$ (9)

З (6) та (9) знаходимо відстань між компонентами зоряної пари:

$$L = l \cdot \rho = \frac{\lambda R}{2d\mu}. \quad (10)$$

З (10) та умови задачі маємо: $L \approx 8{,}6 \cdot 10^7$ км.

Відповідь: $\rho \approx 0{,}046''$, $L \approx 8{,}6 \cdot 10^7$ км.

Зауваження:

1. Покажемо, що φ мале (*мал. 1*). З *мал. 1*

$СД = d \cdot \sin\varphi = k\lambda \le k_{max}\lambda.$ (11)

Але k_{max} можна знайти, використовуючи той факт, що коли різниця ходу променів досягає значень порядку довжини когерентності $l_{ког}$, смуги стають нерозрізнюваними. Отже:

$k_{max}\lambda \approx l_{ког} \approx \lambda^2/\Delta\lambda$, звідси

$k_{max} \approx \lambda/\Delta\lambda,$ (12)

Враховуючи (11) та (12), маємо

$$k_{\max} \approx \frac{5{,}6 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-9}} \approx 100$$

СД $\approx \lambda^2/\Delta\lambda$ (13)

(в астрофізиці $\Delta\lambda \sim 5 \cdot 10^{-9}$ м). Тому sinφ мале і sinφ ≈ φ.

2. З умови задачі та (13)

СД ≈ k_{max} $\lambda \approx 100 \cdot 5{,}55 \cdot 10^{-7} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-5}$ м, що значно менше аніж відстань між діафрагмою та об'єктивом (прийнято, що СЛ ~ 10 см).

Задача 11.5

Відомо, що період малих коливань математичного маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L/g}\ , \tag{1}$$

а період малих коливань фізичного маятника

$$T_2 = 2\pi\sqrt{J/mgL}\ , \tag{2}$$

де J – момент інерції кульки щодо осі обертання, m – маса кульки, l – відстань від центру кульки до точки підвісу. За теоремою Штейнера

$$J = J_0 + ml^2\ , \tag{3}$$

Де $J_0 = 2/5mR^2$. (4)

Підставивши (3)-(4) до (2), отримаємо:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]}\ , \tag{5}$$

Звідки $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{1+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{R}{l}\right)^2}$. (6)

Похибка δ, яку ми допустимо, припустивши, що підвішена на кульці нитка є математичним маятником, визначається таким чином:

$$\delta = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \sqrt{1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2} - 1\ , \tag{7}$$

Звідки $\dfrac{R}{l} = \sqrt{\dfrac{5}{2}\left[(1+\delta)^2 - 1\right]} \approx \sqrt{5\delta}$. (8)

За умовою $\delta \le 0{,}005$, тоді з (8) знаходимо, що $R/l \le 0{,}158$.

Оскільки R = 0,03 м, то гранична відстань від центру кульки до точки підвісу $l \ge 0{,}19$ м, а гранична довжина нитки $L = l - R = 0{,}16$ м = 16 см.