Міністерство освіти і науки України
XLV Всеукраїнська олімпіада юних фізиків, м. Вінниця, 2008
Теоретичний тур, 10-й клас

1. Один моль двоатомного ідеального газу (5 ступенів вільності) знаходиться в циліндричній посудині під легким поршнем (мал.1). В початковому стані газ мав температуру 300К і займав половину об'єму посудини. На мал.2 подана залежність температури газу від часу після увімкнення нагрівача потужністю 10 Вт (ділянка 1-2 лінійна). Знайти рівняння газових процесів на ділянках 1-2 та 2-3-4. Як змінюється теплоємність газу при збільшенні його об'єму? Система теплоізольована, теплоємності поршня і стінок посудини значно менші за величиною від теплоємності газу. Зовнішній тиск p_A дорівнює атмосферному.

2. Чотири однорідні стержні однакової маси m та однакової довжини *l*, що з'єднані між собою та зі стійкою шарнірно, підвішені так, як показано на мал.3. Відстань між шарнірами A і E дорівнює $2a$. При цьому $2a=l(1+\sqrt{3})$. Шарніри B і D з'єднані ниткою, довжина якої *l*. Нитку миттєво перерізають. На скільки зміститься шарнір C при переході системи із початкового в положення стійкої рівноваги? Яка кількість теплоти виділиться за час, коли система набуде стійкої рівноваги?

3. Супутникові навігаційні системи дозволяють визначати місцезнаходження і швидкість руху у будь-якій точці земної кулі. Супутник передає сигнал, який містить інформацію про точний час його відправлення і координати супутника на цей момент. Приймач реєструє час надходження сигналів від декількох супутників і за затримкою кожного сигналу обчислює відстані до супутників, а разом з цим і своє точне положення. Для цього необхідно приймати сигнали щонайменше від чотирьох супутників, щоб врахувати неточність ходу годинника приймача. Будемо вважати, що супутники рухаються по коловим орбітам з радіусами r = 20 000 км точно. Визначити значення широти, довготи і висоти над рівнем моря людини на повітряній кулі, мобільний телефон якої отримав такі дані від чотирьох супутників:

№ супутника	Час отримання сигналу (годинник приймача)	Час відправлення сигналу за інформацією супутника (точний час)	Широта супутника в момент відправлення сигналу	Довгота супутника в момент відправлення сигналу
1	10 год 12 хв 13,1600 с	10 год 12 хв 13,1121 с	45°00'00'' південна	0°00'00''
2	10 год 12 хв 13,1601 с	10 год 12 хв 13,1122 с	45°00'00'' північна	0°00'00''
3	10 год 12 хв 13,1602 с	10 год 12 хв 13,1123 с	45°00'00'' північна	90°00'00'' східна
4	10 год 12 хв 13,1463 с	10 год 12 хв 13,1120 с	0°00'00''	45°00'00''східна

Земля має приплюснуту форму: екваторіальний радіус R_e=6378,15 км, полярний R_p=6356,80 км. Швидкість світла у вакуумі 299792458 м/с.

4. На підлозі стоїть велика циліндрична діжка, заповнена рідиною до рівня H=1м. Через невеликий отвір, який зроблений у діжці на глибині h=10 см, в горизонтальному напрямку б'є струмінь рідини і розбивається об підлогу поруч із циліндричним стаканом (мал. 4). Якщо в діжці під першим отвором зробити подібний йому другий отвір, струмені води перетнуться в просторі і зіллються в один. Визначити, наскільки точка перетину струменів виявиться нижчою за другий отвір. Уявіть тепер, що другий отвір зроблений на вчетверо більшій глибині, ніж перший, він подібний до нього, але має вдвічі меншу площу перерізу $S_2=S_1/2$. Чи потрапить об'єднаний струмінь до стакану? За якого співвідношення S_2/S_1 струмінь перелетить стакан? Висота стакана h=10см, відстань від нього до діжки в шість разів більша за його діаметр.

5. а) Деякий точковий заряд упродовж тривалого часу утримується на фіксованій відстані від нескінченної незарядженої площини з дуже малою провідністю. Потім заряд швидко віддаляють від площини на відстань удвічі більшу початкової і утримують його в новому положенні. Яка кількість теплоти виділиться після цього в провідній площині, якщо відомо, що під час віддалення точкового заряду було виконано роботу 36 мкДж?

б) Квадратну рамку, у кутах якої розташовані точкові заряди , +q, (-q), +q, (-q), спочатку упродовж тривалого часу тримають у фіксованому положенні біля нескінченної незарядженої площини з дуже малою провідністю (мал.5), а потім швидко повертають на 90° навколо осі, що проходить через центр квадрату перпендикулярно до площини малюнка. Яка кількість теплоти виділиться після цього у провідній площині, якщо відомо, що під час повороту рамки було виконано роботу 36 мкДж?

Задачі запропонували Б.В.Беляєв та С.В.Кара-Мурза (1), А.П.Федоренко (2), О.Ю.Орлянський (3-4), Є.П.Соколов(5).

Министерство образования и науки Украины
XLV Всеукраинская олимпиада юных физиков, г. Винница, 2008
Теоретический тур, 10-й класс

1. Один моль двухатомного идеального газа (5 степеней свободы) находится в цилиндрическом сосуде под легким поршнем (рис.1). В начальном состоянии газ имел температуру 300К и занимал половину объема сосуда. На рис.2 представлена зависимость температуры газа от времени после включения нагревателя мощностью 10 Вт (участок 1-2 линейный). Найти уравнения газовых процессов на участках 1-2 и 2-3-4. Как меняется теплоемкость газа при увеличении его объема? Система теплоизолирована, теплоемкости поршня и стенок сосуда значительно уступают по величин теплоемкости газа. Внешнее давлении p_A равно атмосферному.

2. Четыре однородные стержня одинаковой массы m и одинаковой длины *l*, соединенные между собой и со стойкой шарнирно, подвешены так, как показано на рис.3. Расстояние между шарнирами A и E равно $2a$. При этом $2a=l(1+\sqrt{3})$. Шарниры B и D соединены ниткой длиной *l*. Нитку мгновенно перерезают. На сколько сместится шарнир C при переходе системы из начального в положение устойчивого равновесия? Какое количество теплоты выделится за время, пока система достигнет устойчивого равновесия?

3. Спутниковые навигационные системы позволяют определять местонахождение и скорость движения в любой точке земного шара. Спутник передает сигнал, содержащий информацию о точном времени его отправки и координаты спутника на этот момент. Приемник регистрирует время поступления сигналов от нескольких спутников и по задержке каждого сигнала вычисляет расстояния до спутников, а вместе с тем и свое точное положения. Для этого необходимо принимать сигналы по меньшей мере от четырех спутников, чтобы учесть неточность хода часов приемника. Будем считать, что спутники движутся по круговым орбитам с радиусами r = 20 000 км точно. Определить значения широты, долготы и высоты над уровнем моря человека на воздушном шаре, мобильный телефон которого получил такие данные от четырех спутников:

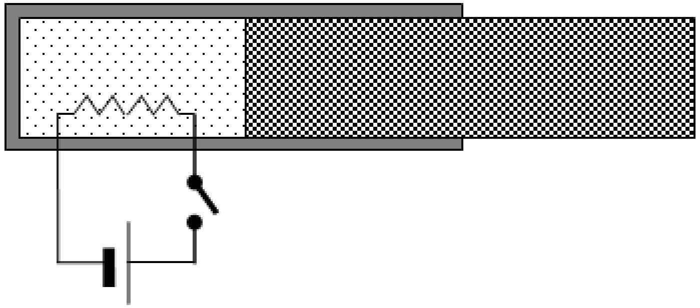
№ спутника	Время приема сигнала (часы приемника)	Время отправления сигнала по информации спутника (точное время)	Широта спутника в момент отправления сигнала	Долгота спутника в момент отправления сигнала
1	10 час 12 мин 13,1600 с	10 час 12 мин 13,1121 с	45°00'00'' южная	0°00'00''
2	10 час 12 мин 13,1601 с	10 час 12 мин 13,1122 с	45°00'00'' северная	0°00'00''
3	10 час 12 мин 13,1602 с	10 час 12 мин 13,1123 с	45°00'00'' северная	90°00'00'' восточная
4	10 час 12 мин 13,1463 с	10 час 12 мин 13,1120 с	0°00'00''	45°00'00'' восточная

Земля имеет приплюснутую форму: экваториальный радиус R_e=6378,15 км, полярный R_p=6356,80 км. Скорость света в вакууме 299792458 м/с.

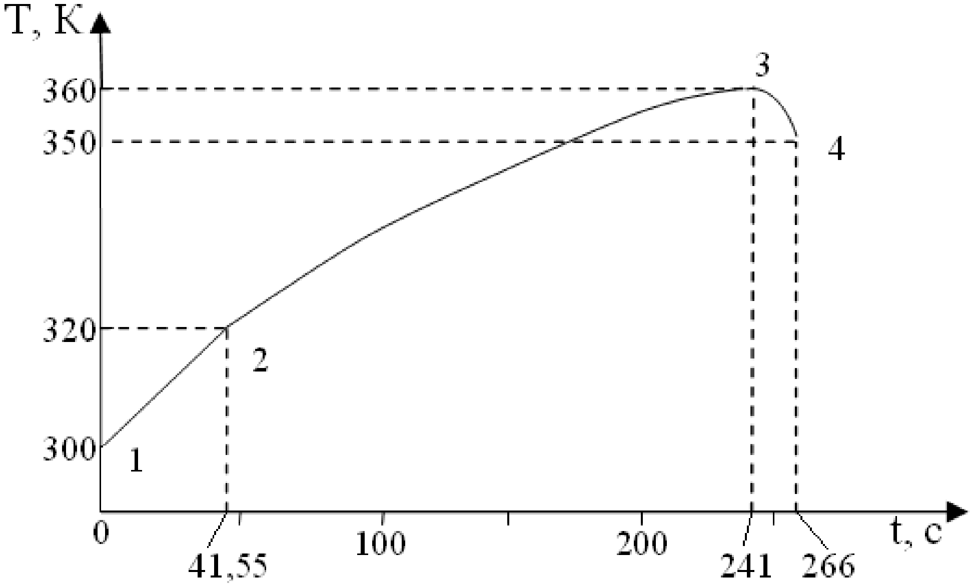
4. На полу стоит большая цилиндрическая бочка, заполненная жидкостью до уровня H=1м. Через небольшое отверстие, сделанное в бочке на глубине h=10 см, в горизонтальном направлении бьет струя жидкости и разбивается об пол рядом с цилиндрическим стаканом (мал. 4.) Если в бочке под первым отверстием сделать подобное ему второе, струи воды пересекутся в пространстве и сольются в одну. Определите, насколько точка пересечения струй окажется ниже второго отверстия. Представьте теперь, что второе отверстие сделано на вчетверо большей глубине, чем первое, оно подобно ему, но имеет вдвое меньшую площадь сечения $S_2=S_1/2$. Попадет ли объединенная струя в стакан? При каком соотношении S_2/S_1 струя перелетит стакан? Высота стакана h=10см, расстояние от него до бочки в шесть раз больше, чем его диаметр.

5. а) Некоторый точечный заряд в течение длительного времени удерживается на фиксированном расстоянии от бесконечной незаряженной плоскости с очень малой проводимостью. Потом заряд быстро удаляют от плоскости на расстояние, вдвое большее начального, и удерживают его в новом положении. Какое количество теплоты выделится после этого в проводящей плоскости, если известно, что за время удаления точечного заряда была выполнена работа 36 мкДж? б) Квадратную рамку, в углах которой расположены заряды +q, (-q), +q, (-q), сначала в течение длительного времени удерживают в фиксированном положении от бесконечной незаряженной плоскости с очень малой проводимостью (рис.5), а потом быстро поворачивают на 90° вокруг оси, проходящей через центр квадрата перпендикулярно плоскости рисунка. Какое количество тепла выделится после этого в проводящей плоскости, если известно, что при повороте рамки была выполнена работа 36 мкДж?

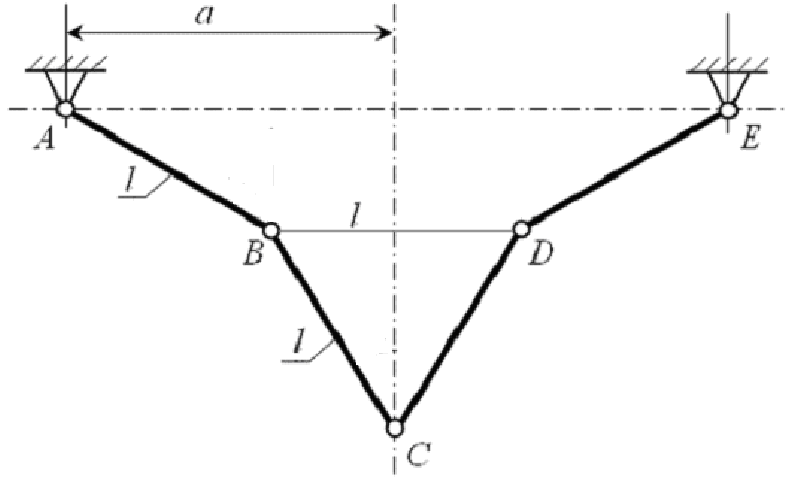
Задачи предложили Б.В.Беляев и С.В.Кара-Мурза (1), А.П.Федоренко (2), О.Ю.Орлянский (3-4), Е.П.Соколов(5).



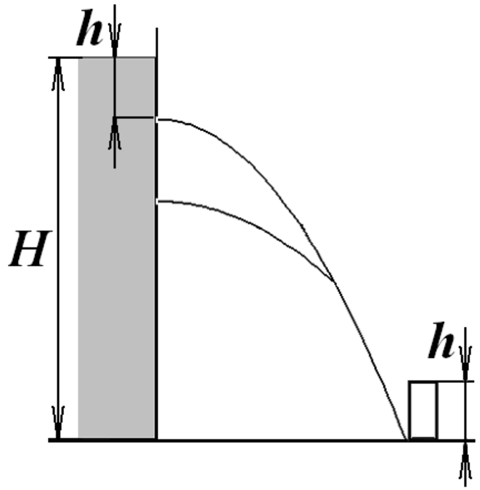
Мал. 1.



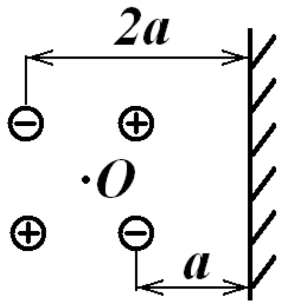
Мал. 2.



Мал. 3.



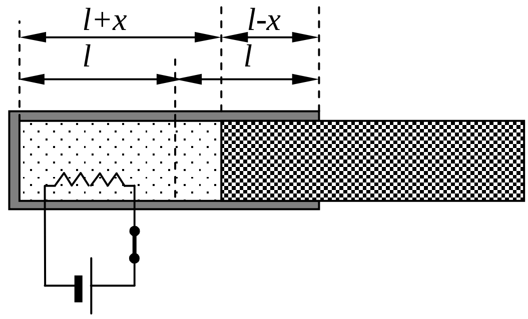
Мал. 4.



Мал. 5.

10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 1 (Розв'язок)

Малюнок з умови задачі:



Протягом часу t_1 = 41,55 с температура газу лінійно зростає від T_0 = 300 К до T_1 = 320 К (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41{,}55}{20} = \frac{5}{2}R.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності $C_{12} = C_V$. Це означає, що протягом часу t_1 після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює V_0.
При досягненні температури T_1 тиск газу в посудині зростає до значення

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \tag{1}$$

де F – сила тертя спокою, S – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right), \qquad p(x) = p_A + \frac{F}{S}\frac{(l-x)}{l} = p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}, \tag{2}$$

Виключивши з цих рівнянь величину $\frac{x}{l}$, отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F}{S}\frac{V}{V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A)\frac{V}{V_0} \tag{3}$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина - тиск p_1. Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від x *(див. рис. у розв'язку)*:

$$RT(x) = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right)\left(p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}\right). \tag{4}$$

Температура газу досягає максимуму T_m = 360 К (рис 2) при деякому значенні $\frac{x_m}{l}$, яке може бути визначене з умови екстремуму функції $T(x)$ як вершина параболи:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2}\frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \tag{5}$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що $p_1V_0 = RT_1$, отримуємо квадратне рівняння відносно величини $\frac{p_A}{p_1}$

$$4\left(\frac{T_m}{T_1} - 1\right)\left(1 - \left(\frac{p_A}{p_1}\right)\right) = \left(\frac{p_A}{p_1}\right)^2.$$

Розв'язуючи рівняння при підстановці числових значень T_1 та T_m отримуємо $p_1 = 2p_\text{A}$. Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме вигляд:

$$p = p_A\left(3-\frac{V}{V_0}\right) \qquad \text{або} \qquad \frac{V}{V_0} = 3-\frac{p}{p_A}. \qquad (6)$$

Початковий об'єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 = p_1\frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8}p_A.$$

Рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$\frac{V(3-V/V_0)}{T} = const.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об'єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплотою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки посудини, можна знехтувати):

$$\delta Q = \frac{5}{2}RdT + pdV.$$

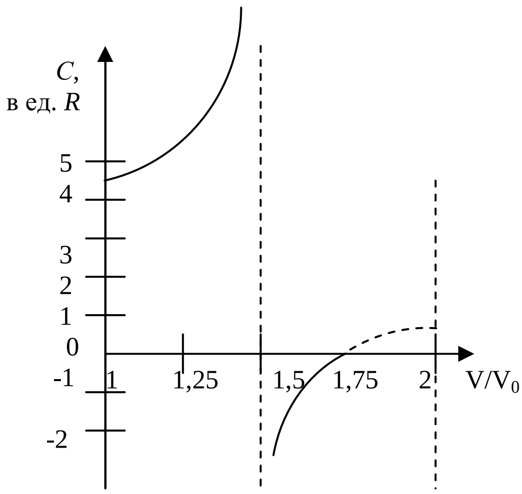
Звідки теплоємність газу $C = \frac{5}{2}R + p\frac{dV}{dT}$. Із рівняння стану

$$p_A V(3-\frac{V}{V_0}) = RT$$

отримаємо $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{(3-2V/V)p_A}$. Так як $p = p_A(3-V/V_0)$, то

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3-V/V_0}{3-2V/V_0}R.$$

На графику схематично зображено залежність $C=f$ (V/V_0). Як бачимо, при $1{,}5<V/V_0<1{,}75$ теплоємність від'ємна.



10 клас Старе авторське!
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 2 (Розв'язок)

Згідно даних задачі очевидно, що в момент початку руху системи $\alpha_0 = 60^0$, $\beta_0 = 30^0$ (рис.2).

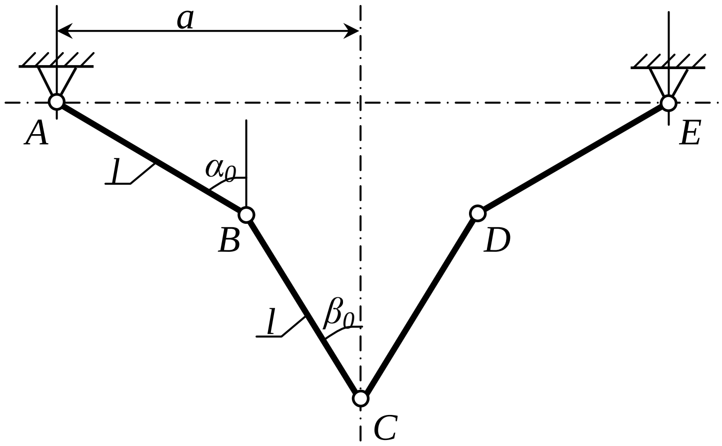


Рис.2

З часом система набуде стану стійкої рівноваги (рис. 3). Сила *F*, що діє з боку правої частини системи на ліву, в силу симетрії системи направлена так, як показано на рис. 3.
Запишемо умову рівноваги стержня ВС відносно точки В:

$$Fl\cos\beta - mg\frac{l}{2}\sin\beta = 0.$$

Звідси

$$F = \frac{mg}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}. \; (1)$$

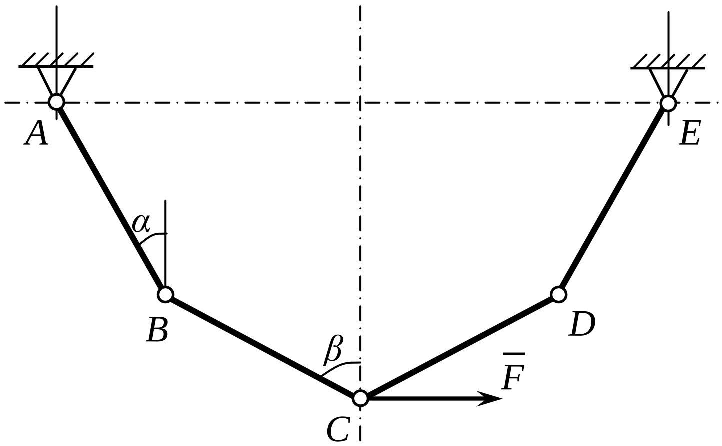


Рис.3

Тепер запишемо умову рівноваги лівої частини системи відносно точки А:

$$F(l\cos\alpha + l\cos\beta) - mg\frac{l}{2}\sin\alpha - mg(l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\beta) = 0.$$

Звідси

$$F = \frac{mg}{2}\frac{3\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}. \qquad (2)$$

Прирівняємо (1) і (2):

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}.$$

Звідси

$$\mathrm{tg}\beta = 3\mathrm{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Шарнір С переміщується тільки по вертикалі, тому

$$l\sin\alpha + l\sin\beta = a = l\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

або

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}. \qquad (4)$$

Дослідимо систему рівнянь (3) та (4). Рівнянню (4) відповідають ті значення кутів α і β, при яких точка С знаходиться на осі симетрії. Таких пар значень α і β безліч. Рівняння (3) виділяє з цієї безлічі конкретну пару кутів α_1 та β_1, яка відповідає умові стійкої рівноваги.

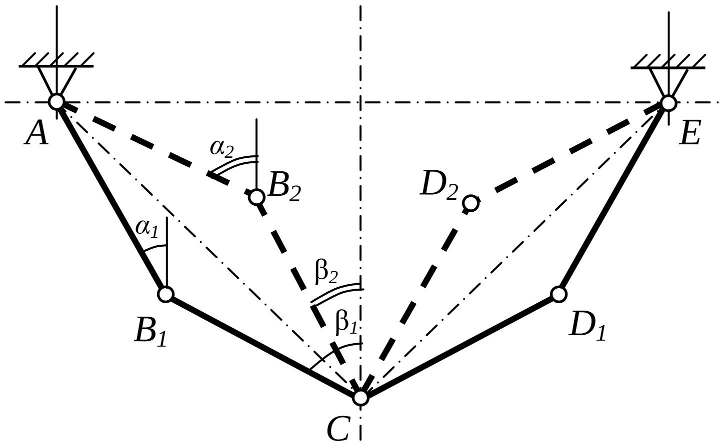


Рис.4

Значення α_1 і β_1 можна визначити, розв'язуючи вказану систему чисельними методами.

Але дана механічна система має ще одну особливість. Положенню точки С при стійкій рівновазі системи відповідає ще одна пара кутів α_2 і β_2. Це випливає з, що коли існує трикутник AB_1C, то при тих же положеннях шарнірів А і С існує також трикутник AB_2C (рис.4).Або це випливає також з рівняння (4), згідно якого α і β можна поміняти місцями.

Все сказане відповідає заміні $\alpha_1 = \beta_2$ та $\beta_1 = \alpha_2$. Така заміна трансформує умову (3) стійкої рівноваги в умову (5) існування другого розв'язку для заданого положення шарніра С. Одержимо

$$tg\alpha_2 = 3tg\beta_2. \qquad (5)$$

Так як при $\alpha_2 = \alpha_0 = 60^0$ та при $\beta_2 = \beta_0 = 30^0$ умова (5) виконується, то робимо висновок, що початкове положення шарніра С співпадає з його положенням за умови стійкої рівноваги.

Отже, шарнір С після перерізування нитки не зміститься, а за стійкої рівноваги $\alpha_1 = 30^0$, $\beta_2 = 60^0$.

Кількість тепла Q, що виділиться по закінченні руху системи, дорівнює зменшенню її потенціальної енергії. Враховуючи незмінність положень точок А, С і Е, одержимо:

$$Q = 2m(\frac{l}{2}\cos\alpha_1 - \frac{l}{2}\cos\alpha_0) + 2m(\frac{l}{2}\cos\beta_0 - \frac{l}{2}\cos\beta_1) = 2mgl(\cos 30^0 - \cos 60^0) = mgl(\sqrt{3}-1).$$

10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 3 (Розв'язок)

Схематично зобразимо положення супутників (див. Рис.1.) Зазначимо, що різниця часу відправлення і отримання сигналів від перших двох супутників однакова $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0{,}0479\,\text{с}$. Отже приймач знаходиться в площині екватору.

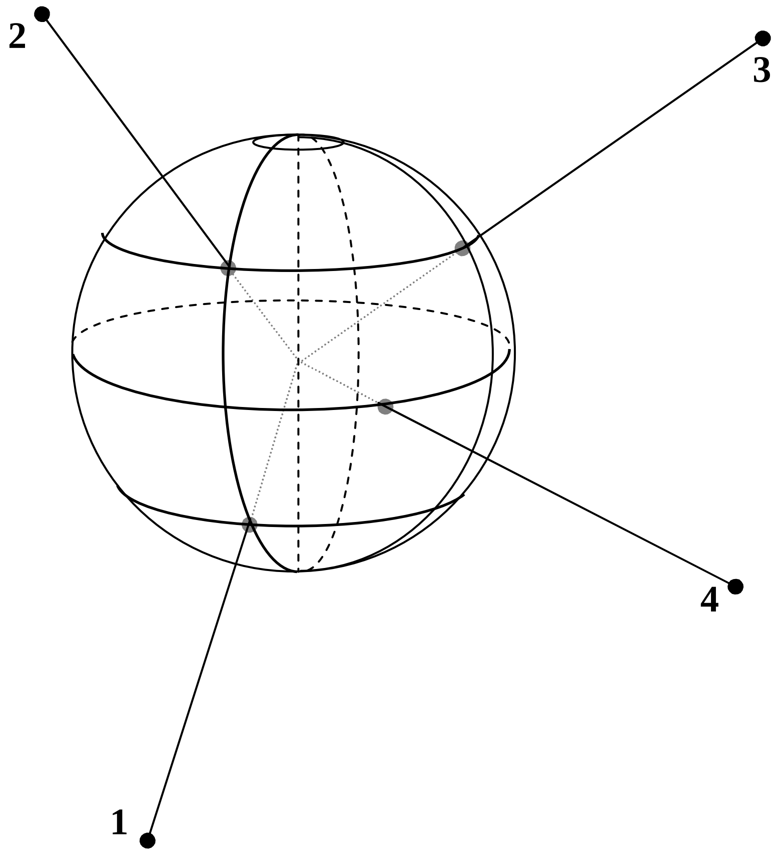


Рис.1.

Також однаковою є різниця часу відправлення і отримання сигналів від другого і третього супутників $\Delta t_2 = \Delta t_3 = 0{,}0479\,\text{с}$. Отже приймач знаходиться в площині меридіану 45°. Дві площини перетинаються вздовж лінії з координатами четвертого супутника. Таким чином, приймач знаходиться безпосередньо під четвертим супутником. Перед тим як розглянути надходження сигналів до приймача від першого і четвертого супутників визначимо кут, який утворюють напрями на ці супутники з центру планети.

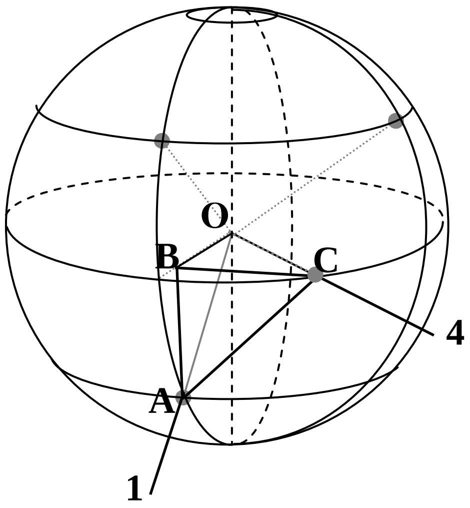


Рис.2.

Оскільки за умовою кути AOB і BOC дорівнюють 45°, $AB = BC = R/\sqrt{2}$, де R - відстань від центру планети до спостерігача (див. Рис.2). Отже $AC = R$ і трикутник OAC є рівностороннім з кутами по 60°. Розглянемо тепер площину цього трикутника (Рис.3). Позначимо через $\Delta\tau$ розходження у часі між годинником приймача і точним часом t супутників. Тоді відстань між спостерігачем (точка C) і 4-м супутником $r - R = c(\Delta t_4 + \Delta\tau)$, а відстань між спостерігачем і 1-м супутником $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos 60^\circ} = c(\Delta t_1 + \Delta\tau)$. Маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими R і $\Delta\tau$, звідки знаходимо:

$$\begin{cases} R = c(\Delta t_1 - \Delta t_4)\dfrac{2r + c(\Delta t_1 - \Delta t_4)}{r + 2c(\Delta t_1 - \Delta t_4)} \approx 6383{,}04\,\text{км} \\ \Delta\tau = \dfrac{r - R}{c} - \Delta t_4 \approx 0{,}0111\,\text{с}. \end{cases}$$

Отже повітряна куля знаходиться у точці з координатами 0°00’00’’ широти (тобто над екватором), 45°00’00’’ східної довготи (неподалік від східного узбережжя Африки), на висоті $R - R_e \approx 4$ км 890 м над рівнем Індійського океану.

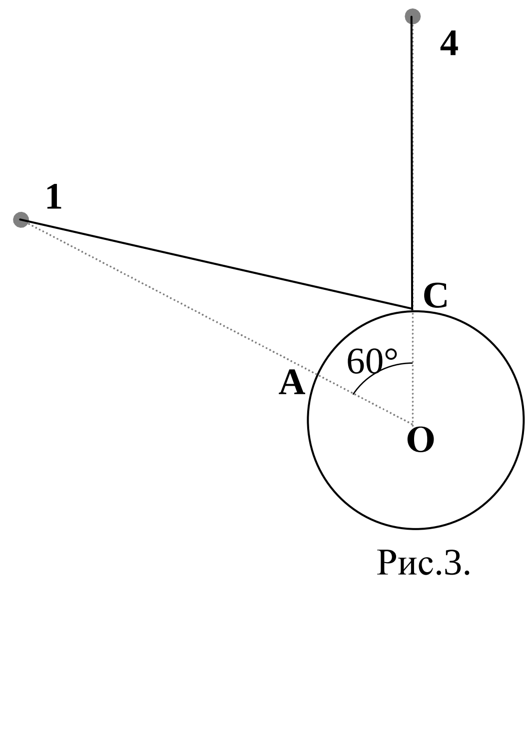


Рис.3.

Игорь!

То, что синим курсивом, можно частично или полностью включить в задачу. Тогда она будет похожа на межнаровскую (думаю, рано или поздно там что-нибудь по GPS дадут). Небольшие нюансы: Земля вращается, орбиты под углами (хотя вот это как раз и не очень существенно). Прийдется вычислять скорости спутников, периоды их обращения и думать.

Наконец, могу переделать основной вариант: задать не радиус орбиты, а период обращения равный, например, в точности полупериоду Земли (вначале работы GPS как раз эта схема и использовалась). Сейчас периоды незначительно отличаются от 12 часов, а радиусы орбит от заданных в условии задачи.

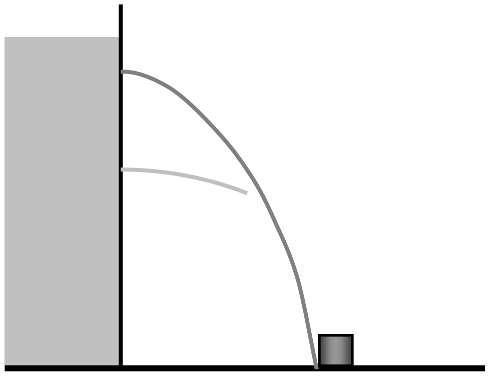
Наконец, условия избыточны: в основном варианте полярный радиус и сплюснутость Земли не используются, но если заранее выбросиь их из условия – получится подсказка об экваторе.

Вообщем, звони или пиши, как удобнее.

Олег

10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 4 (Розв'язок)

Малюнок з умови задачі:



Як відомо, за ідеальних умов швидкість вильоту води з отвору можна знайти або з рівняння Бернуллі, або з закону збереження енергії (з урахуванням великої площі перерізу діжки $v = \sqrt{2gh}$ - формула Торрічеллі). В реальних умовах швидкість завжди дещо менша і залежить від форми отвору (обговорення цього питання можна знайти, наприклад, у Фейнманівських лекціях з фізики). Тому будемо вважати, що

$$v_1 = \alpha\sqrt{2gh_1} = \alpha\sqrt{2gh}, \qquad v_2 = \alpha\sqrt{2gh_2},$$

де α – деяке менше за одиницю безрозмірне число, однакове для обох отворів внаслідок їх подібності, h_2 - глибина другого отвору. Знайдемо положення точки перетину струменів. У вертикальному напрямку за деякий час t вода опускається на відстань $y = \frac{gt^2}{2}$,у горизонтальному – зміщується на відстань $x = vt$. Таким чином, для системи координат з початком у точці виходу першого струменя і спрямованою вниз віссю ординат, маємо наступні рівняння ліній першого і другого струменів:

$$y_1 = \frac{gx_1^2}{2v_1^2}, \qquad y_2 = \Delta h + \frac{gx_2^2}{2v_2^2},$$

де $\Delta h = h_2 - h_1$ відстань між отворами. Оскільки в точці перетину координати співпадають $x_1 = x_2 \equiv x_0$, $y_1 = y_2 \equiv y_0$, з урахуванням виразу для швидкостей знаходимо:

$$\begin{cases} x_0 = 2\alpha\sqrt{h_1 h_2}, \\ y_0 = h_2. \end{cases}$$

Тобто точка перетину струменів нижча від другого отвору на відстань $y_0 - \Delta h = h_1$. Дивний і красивий результат. Виявляється, точка перетину струменів буде завжди нижча за нижній отвір на відстань між верхнім отвором і поверхнею води (не зважаючи на те, яка відстань між самими отворами). В нашому випадку це h=10 см. Єдине застереження це сторонні предмети, які можуть завадити перетину струменів. В нашому випадку – поверхня столу, від якої нижній отвір повинен бути віддаленим щонайменше на ті ж самі 10 см.

Перейдемо до другої частини задачі. За умовою другий отвір зроблений на відстані $h_2 = 4h$ від поверхні води. Тоді $\begin{cases} x_0 = 4\alpha h, \\ y_0 = 4h, \\ v_2 = 2\alpha\sqrt{2gh} = 2v_1. \end{cases}$

Швидкість народженого в точці $(x_0; y_0)$ нового струменя знайдемо із закону збереження імпульсу. Маса води, яка проходить через отвір площею перерізу S за одиницю часу, дорівнює

$q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v$. Для першого і другого отворів маємо

$$q_1 = \rho S_1 v_1 = \alpha \rho S_1 \sqrt{2gh}, \qquad q_2 = \rho S_2 v_2 = \alpha \rho S_2 \cdot 2 v_1 = q_1.$$

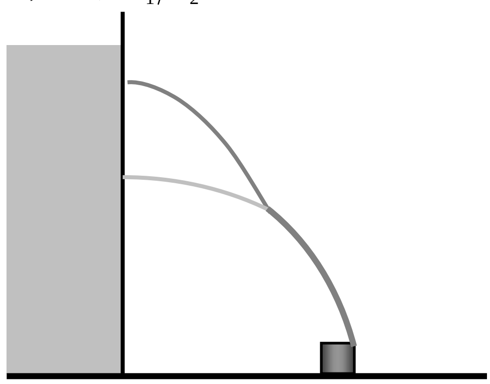
Виявляється, змішуються рівні маси рідини обох струменів. Тоді закон збереження імпульсу
зведеться до визначення середньоарифметичних швидкостей. У горизонтальному напрямку швидкості струменів залишаються незмінними, отже після з'єднання $v_x = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{3}{2} v_1$. У вертикальному напрямку $v_y = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2gy_0} + \sqrt{2g(y_0 - \Delta h)}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$. Для того, щоб знайти відстань від діжки, на якій опиниться струмінь, знизившись до рівня отвору стакана, знайдемо
спочатку час τ такого зниження. Точка перетину знаходиться на висоті $H - h - y_0 = 5h$ над поверхнею, а висота стакану h. Отже $4h = v_y \tau + \frac{g\tau^2}{2}$ або

$$g\tau^2 + 3\sqrt{2gh}\tau - 8h = 0.$$

Додатний корінь квадратного рівняння $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. За цей час в горизонтальному напрямі струмінь зміститься на $l = v_x \tau = \frac{3}{2}\alpha\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3\alpha h$ і опиниться на відстані $L = x_0 + l = 7\alpha h$ від діжки. Стакан знаходиться від діжки на відстані 6 своїх діаметрів d. Цю ж відстань за умовою задачі спочатку долав у горизонтальному напрямку один перший струмінь. Тобто,

$$6d = v_1 t = \alpha\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 6\alpha h.$$

Отже $d = \alpha h$ і тоді $L = 7d$. Струмінь буде попадати у верхню крайню точку стакану (що може призвести навіть до перевертання останнього). Під час розрахунків ми знехтували опором повітря, впливом сил поверхневого натягу на рух струменя, завдяки яким той власне й утворює одне ціле. Навіть у цьому випадку завдяки товщині струменя вода буде частково попадати у стакан. Відповідь на останнє питання в ідеалізованому випадку: струмінь перелітатиме стакан, якщо $S_1/S_2 < 2$.



10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 5 (Розв'язок)

Скористаємося методом електростатичних зображень.

1) Під час переміщення точкового заряду можна вважати заряд-зображення нерухомим. Отже, виконана під час переміщення робота

$$A = -k\frac{q^2}{3a} + k\frac{q^2}{2a} = k\frac{q^2}{6a}.$$

(ми збільшили відстань між зарядами від $2a$ до $3a$). За умовою ця робота $A = 36$ мкДж.

Застосуємо тепер закон збереження енергії:

$$W_1 + A = W_2 + Q.$$

Початкова енергія кулонівської взаємодії заряду з площиною

$$W_1 = -\frac{1}{2}\cdot k\frac{q^2}{2a},$$

а кінцева енергія

$$W_2 = -\frac{1}{2}\cdot k\frac{q^2}{4a}.$$

Ми врахували, що енергія взаємодії реального заряду з його зображенням удвічі менша, ніж енергія взаємодії двох відповідних реальних зарядів (досить згадати, що реальне електричне поле існує тільки у півпросторі).

Таким чином,

$$Q = W_1 - W_2 + A = k\frac{q^2}{24a} = \frac{1}{4}A = 9 \text{ мкДж}.$$

2) У цьому випадку легко помітити, що енергія кулонівської взаємодії не змінюється (можна вважати, що просто змінилися на протилежні знаки всіх зарядів). Отже, згідно з законом збереження енергії $Q = A = 36$ мкДж.