Міністерство освіти і науки України

XLV Всеукраїнська олімпіада юних фізиків, м. Вінниця, 2008

Теоретичний тур, 11-й клас

1. Один моль двоатомного ідеального газу (5 ступенів вільності) знаходиться в циліндричній посудині під легким поршнем (мал.1). В початковому стані газ мав температуру 300К і займав половину об'єму посудини. На мал.2 подана залежність температури газу від часу після увімкнення нагрівача потужністю 10 Вт (ділянка 1-2 лінійна). Знайти рівняння газових процесів на ділянках 1-2 та 2-3-4. Як змінюється теплоємність газу при збільшенні його об'єму? Система теплоізольована, теплоємності поршня і стінок посудини значно менші за величиною від теплоємності газу. Зовнішній тиск p_A дорівнює атмосферному.

2. Контур, складений із сполучених послідовно котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю C, підключених до джерела ЕРС. В моменти часу, коли напруга на конденсаторі досягає максимального значення, полярність джерела змінюється на протилежну. Якою буде максимальна напруга на конденсаторі після n таких перемикань? Якою буде максимальна напруга на конденсаторі за наявності енергетичних втрат у контурі? Опір втрат r вважати значно меншим від характеристичного опору $\rho=(L/C)^{1/2}$. Через яке число перемикань буде досягнута максимальна амплітуда напруги на конденсаторі?

3. Хвиля довільної природи поширюється від джерела 1 (мал.3). Кільцевий інтерферометр являє собою диск радіуса R, який обертається з кутовою швидкістю Ω навколо осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до площини диска. Кількість розташованих вздовж кола дзеркал 3 прямує до нескінченності. На диску також розміщено напівпрозору пластинку 2 та приймач хвиль 4. Напівпрозора пластинка розділяє хвилю, яку випромінює джерело, на дві – одна хвиля поширюється по колу радіуса R в напрямку обертання диска, а друга - в протилежному. Швидкість хвилі відносно нерухомого диска Vφ, а частота – ω. Нехтуючи зміною геометричних розмірів інтерферометра та поперечним зсувом зустрічних хвиль внаслідок проявів неінерціальних властивостей системи відліку, знайти різницю Δt часу проходження кільця кожною з зустрічних хвиль. Порівняйте цю різницю в випадку електромагнітних та акустичних хвиль. Чи залежить ця різниця від того, якою речовиною заповнений інтерферометр? Врахувавши, що приймач та джерело хвиль розташовані на відстані R від центра обертання, знайдіть різницю фаз зустрічних хвиль, які утворюють інтерференційну картину на приймачі.

4. Відомо, що під час зйомки зі спалахом або потужним підсвітлюванням від маленьких пилинок або краплин, наявних у повітрі, на знімку помітні круги (мал.4). Поясніть фізику цього явища. Припустивши, що за це явище відповідають саме краплинки, визначте відстань від об'єктиву камери до двох із них: тієї, що дає найбільше зображення (у центрі), і дещо меншої на фоні плеча людини. Радіус об'єктиву R можна оцінити в 1 см, відстань від об'єктиву до людини d в 3 м. Інші дані визначте, використовуючи фотографію. Уявіть собі, що у Вас є фотознімок, на однорідному фоні якого видно багато кругів різних розмірів та яскравості. Ви знайшли два однаково світлі круги, які мають різні радіуси r_1' і r_2'. Вважаючи, що пилинки однакові, запропонуйте додаткове співвідношення для визначення характеристик фотоапарату. Об'єктив фотоапарату вважати тонкою лінзою.

5. Дана система блоків (мал.5). Через блоки перекинута тонка невагома нерозтяжна нитка. Всі 2n-1 (n – натуральне число) блоків мають однакові маси M і радіуси r. Блоки можуть обертатися навколо своїх осей без тертя. Нитка не ковзає по блоках. Коефіцієнт пружності пружини k. Визначити період малих вертикальних коливань тягарця масою m після виведення його з положення рівноваги. Момент інерції кожного блоку вважати рівним $Mr^2/2$.

Задачі запропонували Б.В.Беляєв та С.В.Кара-Мурза (1-2), С.Й.Вільчинський (3), О.Ю.Орлянський (4), С.У.Гончаренко (5).

Министерство образования и науки Украины

XLV Всеукраинская олимпиада юных физиков, г. Винница, 2008

Теоретический тур, 11-й класс

1. Один моль двухатомного идеального газа (5 степеней свободы) находится в цилиндрическом сосуде под легким поршнем (рис.1). В начальном состоянии газ имел температуру 300К и занимал половину объема сосуда. На рис.2 представлена зависимость температуры газа от времени после включения нагревателя мощностью 10 Вт (участок 1-2 линейный). Найти уравнения газовых процессов на участках 1-2 и 2-3-4. Как меняется теплоемкость газа при увеличении его объема? Система теплоизолирована, теплоемкости поршня и стенок сосуда значительно уступают по величине теплоемкости газа. Внешнее давлении p_A равно атмосферному.

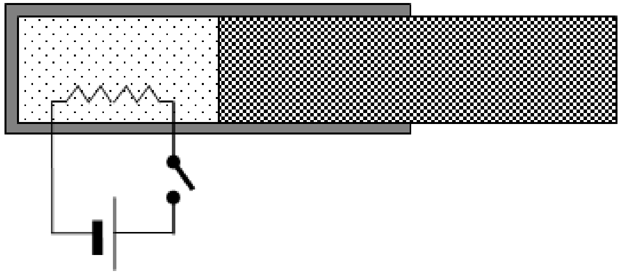
2. Контур состоит из соединенных последовательно катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C, подключенных к источнику ЭДС. В моменты времени, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения, полярность источника меняется на противоположную. Каким будет максимальное напряжение на конденсаторе после n таких переключений? Каким будет максимальное напряжение на конденсаторе при наличии энергетических потерь в контуре? Сопротивление потерь r считать много меньшим характеристического сопротивления $\rho=(L/C)^{1/2}$. Через какое число переключений будет достигнута максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе?

3. Волна произвольной природы распространяется от источника 1 (рис.3). Кольцевой интерферометр представляет собой диск радиуса R, который вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Количество расположенных по кругу зеркал 3 стремится к бесконечности. На диске также размещена полупрозрачная пластинка 2 и приемник волн 4. Полупрозрачная пластинка разделяет волну, излучаемую источником, на две, – одна волна распространяется по окружности радиуса R в направлении вращения диска, а вторая - в противоположном. Скорость волны относительно неподвижного диска Vφ, а частота – ω. Пренебрегая изменением геометрических размеров интерферометра и поперечным смещением встречных волн вследствие проявлений неинерциальных свойств системы отсчета, найти разность Δt времени прохождения кольца каждой из встречных волн. Сравните эту разность в случае электромагнитных и акустических волн. Зависит ли эта разность от того, каким веществом заполнен интерферометр? Учитывая что приемник и источник волн расположены на расстоянии R от центра вращения, найдите разность фаз встречных волн, которые образуют интерференционную картину на приемнике.

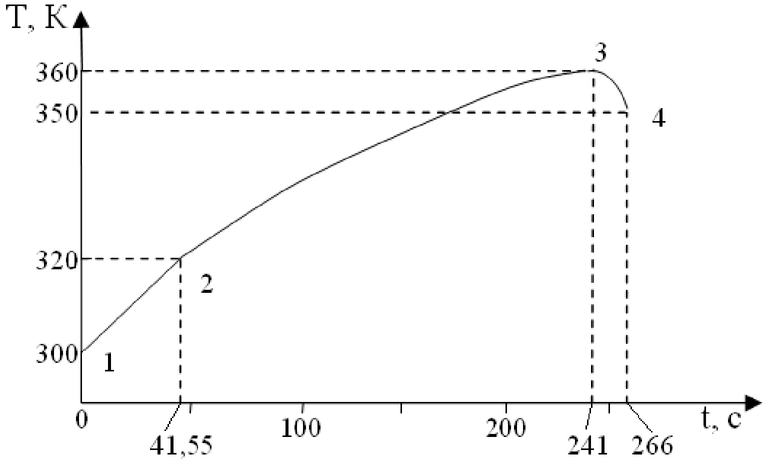
4. Известно, что во время съемки со вспышкой или мощной подсветкой от маленьких пылинок или капелек, имеющихся в воздухе, на снимке заметны круги (рис.4). Объясните физику этого явления. Допустив, что за это явление ответственны именно капельки, определите расстояние от объектива камеры до двух из них: той, которая дает наибольшее изображение (в центре), и несколько меньшей на фоне плеча человека. Радиус объектива R можно оценить в 1 см, расстояние от объектива до человека d в 3 м. Другие данные определите, используя фотографию. Представьте себе, что у Вас есть фотоснимок, на однородном фоне которого наблюдается много кругов разного размера и яркости. Вы нашли два одинаково светлых круга, имеющие разные радиусы r_1' и r_2'. Считая пылинки одинаковыми, предложите дополнительное соотношение для определения характеристик фотоаппарата. Объектив фотоаппарата считать тонкой линзой.

5. Дана система блоков (рис.5). Через блоки перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить. Все 2n-1 (n – натуральное число) блоков имеют одинаковые массы M и радиусы r. Блоки могут вращаться вокруг своих осей без трения. Нить не скользит по блокам. Коэффициент упругости пружины k. Определить период малых вертикальных колебаний грузика массой m после выведения его из положения равновесия. Момент инерции каждого блока считать равным $Mr^2/2$.

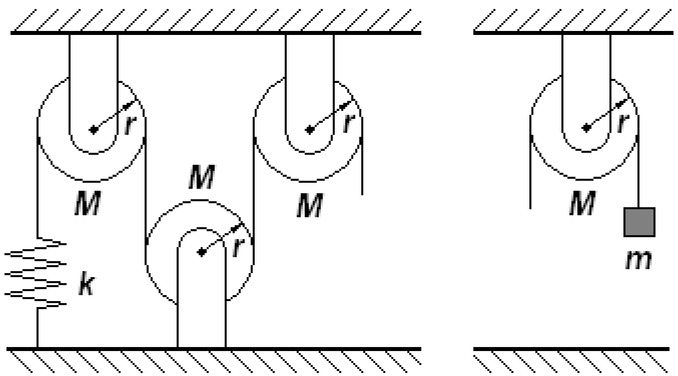
Задачи предложили Б.В.Беляев и С.В.Кара-Мурза (1-2), С.Й.Вильчинский (3), О.Ю.Орлянский (4), С.У.Гончаренко (5).



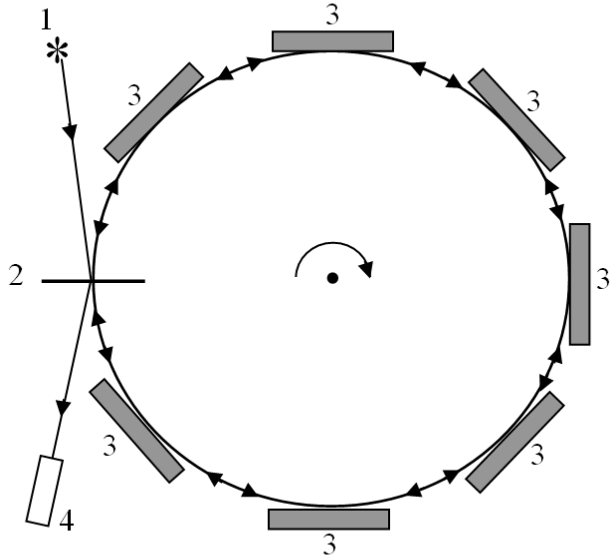
Мал. 1.



Мал. 2.



Мал. 5.



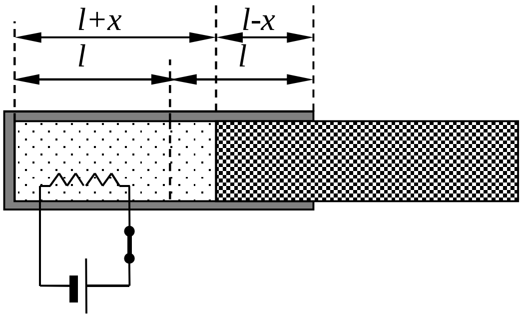
Мал. 3. Кільцевий інтерферометр: 1- джерело випромінювання, 2- світлоподільна пластинка (напівпрозоре дзеркало), 3 – дзеркала, 4 – фотоприймач. Стрілки показують напрямок обертання інтерферометра.

Рис.3. Кольцевой интерферометр: 1 – источник излучения; 2 – светоделительная пластинка (полупрозрачное зеркало); 3 – зеркала; 4 – фотоприемник. Стрелки показывают направление вращения интерферометра.

Мал.4

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 1 (Розв'язок)

Малюнок з умови задачі:



Протягом часу t_1 = 41,55 с температура газу лінійно зростає від T_0 = 300 K до T_1 = 320 K (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41{,}55}{20} = \frac{5}{2}R.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності $C_{12} = C_V$. Це означає, що протягом часу t_1 після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює V_0.
При досягненні температури T_1 тиск газу в посудині зростає до значення

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \tag{1}$$

де F – сила тертя спокою, S – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right), \qquad p(x) = p_A + \frac{F}{S}\frac{(l - x)}{l} = p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}, \tag{2}$$

Виключивши з цих рівнянь величину $\frac{x}{l}$, отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F}{S}\frac{V}{V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A)\frac{V}{V_0} \tag{3}$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина - тиск p_1. Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від x *(див. рис. у розв'язку)*:

$$RT(x) = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right)\left(p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}\right). \tag{4}$$

Температура газу досягає максимуму T_m = 360 K (рис 2) при деякому значенні $\frac{x_m}{l}$, яке може бути визначене з умови екстремуму функції $T(x)$ як вершина параболи:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2}\frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \tag{5}$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що $p_1V_0 = RT_1$, отримуємо квадратне рівняння відносно величини $\frac{p_A}{p_1}$

$$4\left(\frac{T_m}{T_1} - 1\right)\left(1 - \left(\frac{p_A}{p_1}\right)\right) = \left(\frac{p_A}{p_1}\right)^2.$$

Розв'язуючи рівняння при підстановці числових значень T_1 та T_m отримуємо $p_1 = 2p_A$. Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме вигляд:

$$p = p_A\left(3 - \frac{V}{V_0}\right) \qquad \text{або} \qquad \frac{V}{V_0} = 3 - \frac{p}{p_A}. \qquad (6)$$

Початковий об'єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 = p_1\frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8}p_A.$$

Рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$\frac{V(3 - V/V_0)}{T} = const.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об'єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплотою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки посудини, можна знехтувати):

$$\delta Q = \frac{5}{2}RdT + pdV.$$

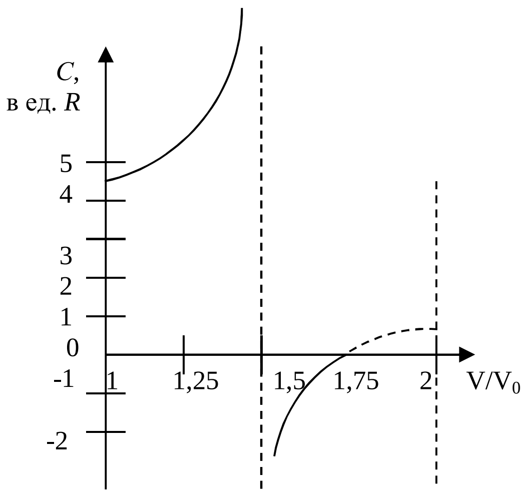
Звідки теплоємність газу $C = \frac{5}{2}R + p\frac{dV}{dT}$. Із рівняння стану

$$p_A V\left(3 - \frac{V}{V_0}\right) = RT$$

отримаємо $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{(3 - 2V/V)p_A}$. Так як $p = p_A(3 - V/V_0)$, то

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0}R.$$

На графику схематично зображено залежність $C=f$ (V/V_0). Як бачимо, при $1{,}5 < V/V_0 < 1{,}75$ теплоємність від'ємна.



11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 2 (Розв'язок)

Для направления обхода контура, изображенного на рис.1, справедливы следующие уравнения и соотношения:

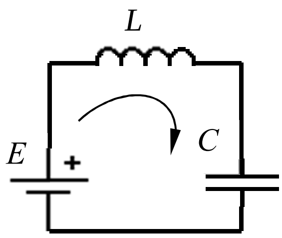


Рис.1

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E$$

или $q'' + \omega^2 q = \frac{E}{L}$, где $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ и $i = \frac{dq}{dt}$.

Если ввести новую переменную $(q - EC)$, то уравнение колебаний принимает вид

$$(q - EC)'' + \omega^2 (q - EC) = 0\,, \qquad (1)$$

а его решение

$$q = A\cos\omega t + EC\,.$$

Амплитуда A и начальная фаза φ определяются из начальных условий $q(0) = 0$ и $i(0) = 0$. Тогда

$$q(t) = EC(\cos\omega t - 1) \quad \text{и} \quad i(t) = \omega EC\sin\omega t\,. \qquad (2)$$

Напряжение и заряд на конденсаторе будут максимальными через полпериода. При этом

$$q_{\max} = -2EC\,. \qquad (3)$$

Первое переключение. Для контура, изображенного на рис.2, начальные условия следующие: $q(0) = |\, q_{max} |$, $i(0) = 0$.

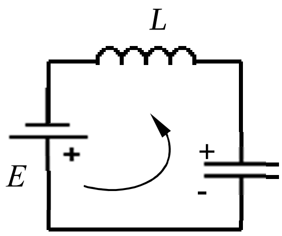


Рис.2

Для выбранного направления обхода применение второго правила Кирхгофа дает

$$-\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E \quad \text{и} \quad i = -\frac{dq}{dt}, \qquad (4)$$

а уравнение колебаний приводится к виду:

$$(q + EC)'' + \omega^2 (q + EC) = 0\,. \qquad (5)$$

Тогда $q = A\cos(\omega t + \varphi) - EC$.

С учетом новых начальных условий получаем $A = 3EC$ и, таким образом, после первого переключения

$$q_1(t) = EC(3\cos\omega t - 1) \quad \text{и} \quad i_1(t) = 3\omega EC\sin\omega t\,, \qquad (6)$$

а максимальное напряжение на конденсаторе

$$U_{1\max} = 4E \cdot$$

Очевидно, что при последующих переключениях колебания описываются уравнениям (5), а начальные условия определяются модулями максимальных значений заряда на конденсаторе и нулевым током. Обобщая результаты (6) на n переключений, получаем

$$q_n(t) = EC[(2n+1)\cos\omega t - 1], \qquad i_n(t) = \omega EC(2n+1)\sin\omega t \tag{7}$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_{n\max} = 2(n+1)E\,, \qquad i_{n\max} = (2n+1)\omega EC \cdot$$

На рис 3 представлены зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени при изменениях полярности источника каждые полпериода в отсутствие потерь.

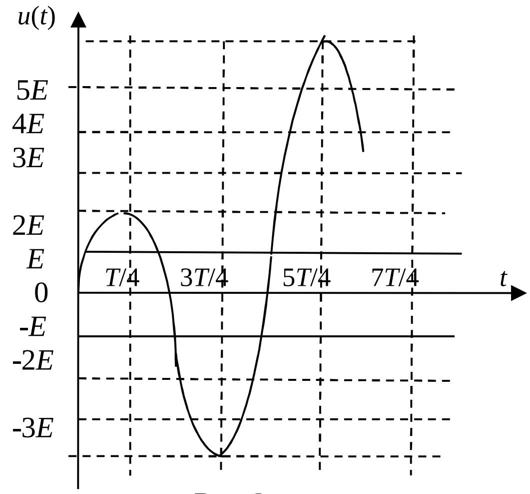


Рис.3

Рассмотрим контур с потерями. Т.к. $r << \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, то изменением амплитуды тока и напряжения за полпериода, а также дополнительным фазовым сдвигом между током и напряжением можно пренебречь и пользоваться уже полученными результатами. Амплитуда напряжения на конденсаторе и тока в контуре будет оставаться неизменной по достижении такого значения, при котором энергия, подводимая за полпериода от источника, будет равна энергии теряемой за это же время.

Пусть энергетический баланс в контуре установился через n переключений. Рассчитаем энергию W, получаемую контуром от источника за полпериода:

$$W = \int_0^{T/2} E i_n(t)dt = E^2 C\omega(2n+1)\int_0^{T/2}\sin\omega t dt = 2E^2C(2n+1) \tag{8}$$

Энергия, теряемая за это же время

$$W_r = \int_0^{T/2} i_n^2(t) r dt = \omega^2 E^2 C^2 r(2n+1)^2 \int_0^{T/2}\sin^2\omega t dt = \frac{\pi}{2}\frac{r}{\sqrt{L/C}}E^2C(2n+1)^2 \tag{9}$$

Приравнивая выражения(8) и (9), получаем $2n+1 = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{L/C}}{r}$. Т.к. $\sqrt{\frac{L}{C}} >> r$, то $n >> 1$ и

$$n \cong \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{L/C}}{r}.$$

Тогда с использованием (7) получаем

$$u(t) = E\left(\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{L/C}}{r}\cos\omega t - 1\right) \approx E\left(\frac{\sqrt{L/C}}{r}\cos\omega t - 1\right) \text{ и } i(t) = \frac{4}{\pi}\omega CE\frac{\sqrt{L/C}}{r}\sin\omega t \approx \frac{E}{r}\sin\omega t.$$

Если потери в контуре обусловлены внутренним сопротивлением источника тока, то полученный результат очевиден – сила тока в контуре не может превышать силу тока короткого замыкания.

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 3 (Розв'язок)

1) Запишемо вирази для довжини шляху $L^{\pm}$ в лабораторній (нерухомій) системі відліку (знак «+» відповідає хвилі, напрямок руху якої співпадає з напрямком обертання, знак «-» - хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку) :
$L^{\pm} = 2\pi R + R\Omega t^{\pm}$, де R – радіус кільця, Ω – кутова швидкість обертання, $t^{\pm}$ - час, який витрачають хвилі на обхід кільця. Якщо V_{φ} – швидкість хвилі відносно нерухомого кільця, то відносно рухомого кільця будемо мати в лабораторній системі відліку згідно релятивістському закону додавання швидкостей
$$V_{\varphi}^{\pm} = \frac{V_{\varphi} \pm R\Omega}{1 \pm \frac{V_{\varphi} R\Omega}{c^2}},$$ де c – швидкість світла.

Тоді часи t^{+} і t^{-} визначаються, як відношення $\frac{L^{+}}{V_{\varphi}^{+}}$ і $\frac{L^{-}}{V_{\varphi}^{-}}$ відповідно:

$$t^{\pm} = \frac{L^{\pm}}{V_{\varphi}^{\pm}} = \frac{2\pi R(1 \pm \frac{V_{\varphi} R\Omega}{c^2})}{V_{\varphi}(1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})},$$ звідки знаходимо шукану різницю розповсюдження зустрічних хвиль
$$\Delta t = t^{+} - t^{-} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}.$$

2), 3) зі знайденого виразу слідує, що різниця не залежить від швидкості розповсюдження хвилі, а отже не залежить від того, чи заповнений оптичним середовищем інтерферометр чи ні і не залежить від природи хвиль, які генеруються джерелом.

4) для обчислення різниці фаз зустрічних хвиль на виході кільця, зручно перейти в систему відліку k', яка супроводжує обертання кільцевого інтерферометра, в силу того, що інтерференційна картина, фіксується приймачем, який є нерухомим відносно системи, що обертається. Згідно перетворенням Лоренца різниця часів розповсюдження зустрічних хвиль в системі відліку k' є
$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$$, а різниця фаз зустрічних хвиль на виході з кільця $$\Phi_S = \omega \Delta t' = \frac{4S\Omega\omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$$ (S – площа кільця).

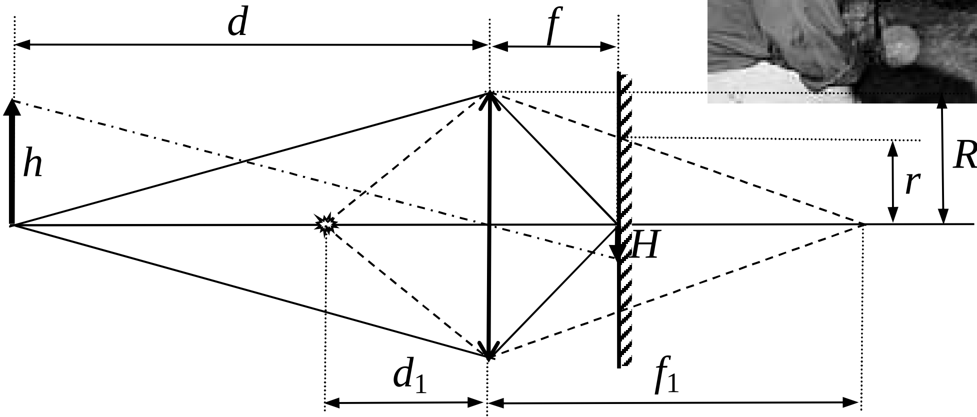
Коментар

Запропонована задача описує так званий ефект Саньяка:

Ефект Ж.Саньяка (1913) поряд з експериментом Майкельсона-Морлі є одним з основоположних дослідів спеціальної теорії відносності. Дослід Саньяка довів принципову можливість експериментального визначення кутової швидкості обертання системи спостерігачем, розташованим всередині системи, тобто можливість визначення неінерційного руху системи для спостерігача, який є нерухомим відносно цієї системи.

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 4 (Розв’язок)

Кулі з острова Пасхи. Розв’язок. Фотоапарат фокусує чітке зображення людини на матриці або фотоплівці. При цьому предмети, які знаходяться ближче або далі не будуть чіткими. Зображення маленьких краплинок перед об’єктивом буде утворюватись далеко позаду матриці, на якій потік світла від краплинки залишає бліду прозору пляму радіусом *r* (див. Рис.).



Запишемо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f}, \\ \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1}, \\ \dfrac{R}{f_1} = \dfrac{r}{f_1 - f}, \\ \dfrac{h}{H} = \dfrac{d}{f}. \end{cases}$$

Розміри, які ми міряємо на фотографії (*H’* і *r’*) не співпадають з розмірами на матриці (*H* і *r*), але $H'/r' = H/r$. З урахуванням останнього рівняння з системи знаходимо $d_1 = \dfrac{d}{1 + \dfrac{h}{H'}\dfrac{r'}{R}}$. Висота кадру відповідає висоті $h \approx 1\,\text{м}$. Для першої краплинки $r'/H' \approx 1/6$, для другої $r'/H' \approx 9/80$. Отже $d_1 \approx 17\,\text{см}$, $d_2 \approx 24{,}5\,\text{см}$. Аналогічні результати для відстані від краплинки до площини лінзи об’єктиву отримуємо, якщо краплинка знаходиться не на головній оптичній осі. Для не дуже великих кутів це є досить точною оцінкою відстаней, які треба знайти.

Зауважимо, що розв’язок задачі відповідає випадку повністю відкритої діафрагми, на що вказує зйомка у печері за наявності у людини ліхтаря. Також можна було б розглянути випадок, коли краплинка ближче до об’єктиву ніж його фокусна відстань. Особливості цього розв’язку більшою мірою пов’язані з конструктивними особливостями фотоапарату (розмірами матриці, тощо…). Нарешті ідея, що концентричні кола, а з ними і сама природа кругів пов’язані з дифракційними явищами на отворі об’єктиву, не витримує оціночних розрахунків.

Середня яскравість E_1 кола на фотографії пропорційна відношенню світлової енергії W_1 до площі кола πr_1^2, на яку вона падає. Енергія W_1 пропорційна до добутку енергії W_0, яку віддзеркалює пилинка, і тілесного куту, який спирається на площу об'єктива $\Omega = \frac{\pi R^2}{d_1^2}$. Енергія W_0 пропорційна до добутку енергії W, яка випромінюється, і тілесного куту, який спирається на площу пилинки $\Omega = \frac{S}{d_1^2}$. Отже, $E_1 = \alpha \frac{WR^2 S}{d_1^4 r_1^2}$ - величина обернено пропорційна четвертій степені відстані. Аналогічний вигляд має співвідношення для другої пилинки. Якщо $E_1 = E_2$, маємо $d_1^2 r_1 = d_2^2 r_2$. З урахуванням попередніх рівнянь знаходимо:

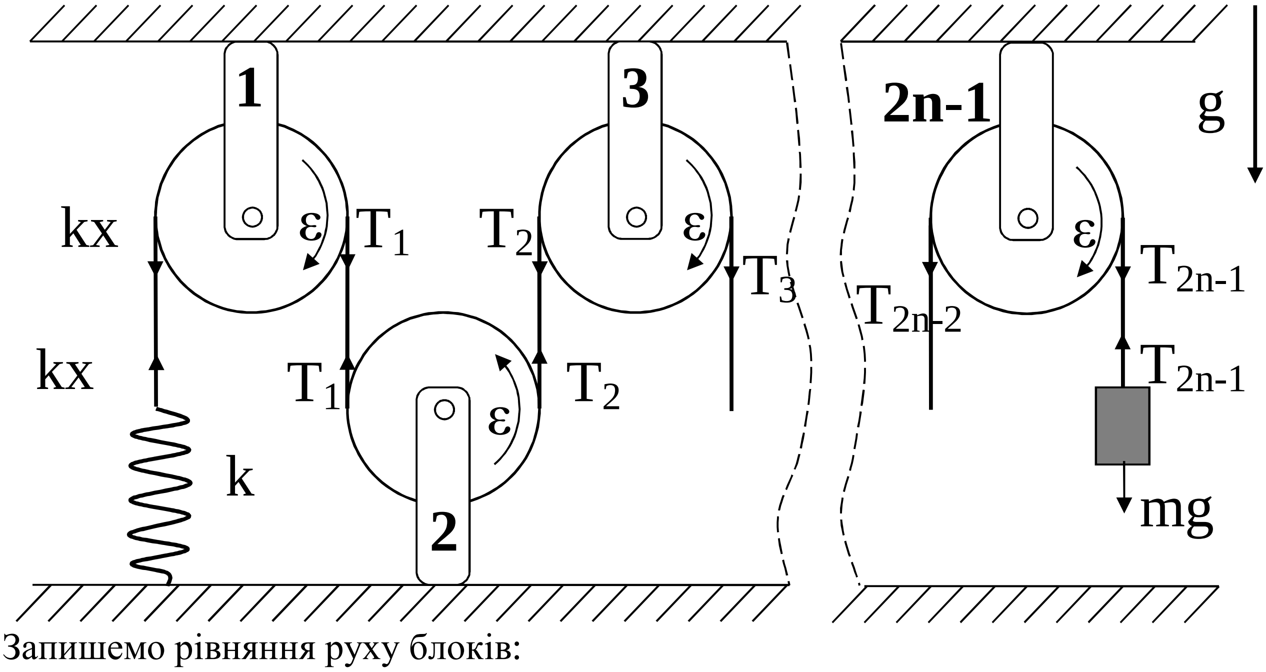
$$d_1 + d_2 = d, \qquad d_1 = \frac{d}{1 + \sqrt{r_1'/r_2'}}, \qquad d_2 = \frac{d}{1 + \sqrt{r_2'/r_1'}}, \qquad R = \frac{h}{H'}\sqrt{r_1' r_2'}.$$

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 5 (Розв'язок)

5) Дано систему блоків (рис.1). Через блоки перекинута тонка невагома нерозтяжна нитка. Всі **2n-1** (**n** – натуральнее число) однорідних блоків мають однакову масу **M** і радіус **r**. Блоки можуть обертатися навколо своєї вісі без тертя Нитка не ковзає по блоках. Коефіцієнт пружності пружини **k**. Визначити період малих вертикальних коливань тягарця маси **m** після виведення його з положення рівноваги.

Розв'язок

На малюнку показано введені позначення, сили, що діють у системі та прискорення які набудуть блоки при обертанні в одному з напрямів. Внаслідок кінематичної в'язі всі кутові прискорення блоків однакові, а прискорення тіла **m** пов'язане з кутовим прискоренням блоків співвідношенням: $\mathbf{a = \varepsilon \cdot r}$.



Запишемо рівняння руху блоків:

1-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_1 - kx) \cdot r}$;
2-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_2 - T_1) \cdot r}$;
3-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_3 - T_2) \cdot r}$;
………………………………
2n-2-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_{2n-2} - T_{2n-3}) \cdot r}$;
2n-1-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - T_{2n-2}) \cdot r}$,

де $\mathbf{J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2}$ момент інерції блока, як однорідного циліндру.

Додавши праві та ліві частини виписані виписаних рівнянь, маємо:

$$\mathbf{(2n-1) \cdot J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - kx) \cdot r} \qquad (1)$$

Рівняння руху тягарця:

$$\mathbf{m \cdot a = m \cdot g - T_{2n-1}} \qquad (2)$$

З рівнянь 1 та 2 з урахуванням зв'язку $\mathbf{a = \varepsilon \cdot r}$ маємо:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m\right)\cdot a = m\cdot g - k\cdot x \qquad (3)$$

Нехай $\mathbf{x = x_0 + \Delta x}$, де $\mathbf{x_0}$ – значення х в стані рівноваги:

$$m\cdot g - k\cdot x_0 = 0$$

Тоді рівняння (3) можна записати так:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m\right)\cdot a = - k\cdot\Delta x$$

Це рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega^2 = \frac{k}{\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m}$$

Звідки період коливань:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m}{k}}$$