

1. На фото (мал.1) – професор кафедри квантової макрофізики ДНУ В.С.Савчук. Вважаючи, що фото було зроблено з досить великої відстані, визначити: 1) яка вада зору у вченого – короткозорість чи далекозорість; 2) визначити з якомога більшою точністю оптичну силу лінз його окулярів; 3) як зміниться відповідь, якщо припустити, що фото було зроблено з близької відстані (пояснить). Відомо, що при виготовленні окулярів оптичні центри лінз розташовують навпроти зіниць очей, коли людина дивиться вдалину. Для виконання завдання скористуйтеся лінійкою та наведеною моделлю (мал.2), на якій схематично зображено голову людини, лінзи окулярів і хід променів (вигляд зверху). При розрахунках вважати, що $R=(10,0\pm 1,0)$ см. Оцініть точність розрахунків.

2. У калориметр з гарячою водою кинули шматочок льоду, температура якого 0°C . Після встановлення теплової рівноваги температура води знизилася на $\Delta t_1=12^\circ\text{C}$. Коли в калориметр кинули другий такий самий шматочок льоду, температура води знизилася ще на $\Delta t_2=10^\circ\text{C}$. На скільки градусів знизиться температура води, якщо в неї кинути третій такий самий шматочок, який повністю розтане? Теплоємністю калориметра та теплообміном з навколишнім середовищем знехтувати.

3. У деякій точці двопровідної телефонної лінії невідомої довжини L сталося пошкодження, внаслідок якого між провідниками з'явився опір витоку R_x (мал.3). До обох кінців лінії прибули бригади (№1 та №2). Вони заміряли опори лінії при розімкнутих (R_1 і R_2) та закорочених (r_1 і r_2) протилежних кінцях лінії і отримали значення $R_1=4$ Ом, $R_2=8$ Ом, $r_1=3,5$ Ом. Визначити опір витоку R_x , відстань l до місця пошкодження, загальну довжину лінії L , а також відновити втрачене значення опору r_2 . Опір одиниці довжини кожного провідника лінії, складає $\rho=5,4\cdot 10^{-4}$ Ом/м.

4. На дерев'яному колесі водяного млина радіусом $R=1$ м рівномірно розміщені N комірочок для набору води ($N=21$). Коли чергова комірочка проходить у верхнє положення, в неї наливається (без початкової швидкості щодо землі) вода масою $m=10$ кг. Коли комірочка проходить нижнє положення, вода виливається з неї зі швидкістю руху крайніх точок колеса (комірочки). Знайдіть швидкість обертання колеса, що встановиться, не враховуючи його маси й тертя в осі, вважаючи зіткнення рідини з комірочкою колеса: а) абсолютно пружним; б) абсолютно непружним.

5. Три однакові пружини розміщені між трьома горизонтальними пластинами. Система має вісь симетрії, що збігається з віссю симетрії верхньої пружини. На мал.4 система зображена в кінцевому положенні. Спочатку пластина 3 була рухомою, а два однакові тягарі маси m лежали на ній симетрично. У положенні статичної рівноваги вона була закріплена нерухомо на відстані a від пластини 1. Після цього обидва тягарі були перекладені на рухому пластину 2, яка, перемістившись, зупинилася на відстані b від пластини 1. Знаючи значення m , a , b , знайти жорсткість пружин k та їх довжину l у недеформованому стані. Пластини весь час залишалися горизонтальними. Масою та деформацією пластин знехтувати.

Задачі запропонували О.Ю.Орлянський (1), С.У.Гончаренко (2-3), В.П.Сохацький (4), Б.Г.Кремінський (5).

1. На фото (рис.1) – профессор кафедры квантовой макрофизики ДНУ В.С.Савчук. Считая, что фото было сделано с достаточно большого расстояния, определить: 1) какой дефект зрения у ученого – близорукость или дальновзорукость; 2) определить с как можно большей точностью оптическую силу линз его очков; 3) как изменится ответ, если предположить, что фото было сделано с близкого расстояния (пояснить). Известно, что при изготовлении очков оптические центры линз размещают напротив зрачков глаз, когда человек смотрит вдаль. Для выполнения задания воспользуйтесь линейкой и приведенной моделью (рис.2), на которой схематически показана голова человека, линзы очков и ход лучей (вид сверху). При расчетах считать, что $R=(10,0\pm 1,0)$ см. Оцените точность расчетов.

2. В калориметр с горячей водой бросили кусочек льда, температура которого 0°C . После установления теплового равновесия температура воды снизилась на $\Delta t_1=12^\circ\text{C}$. Когда в калориметр бросили второй такой же кусочек льда, температура воды снизилась еще на $\Delta t_2=10^\circ\text{C}$. Насколько снизится температура воды, если в нее бросить третий такой же кусочек, который полностью растает? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

3. В некоторой точке двухпроводной телефонной линии неизвестной длины L произошло повреждение, вследствие которого между проводниками появилось сопротивление утечки R_x (рис.3). К обоим концам линии прибыли бригады (№1 и №2). Они измерили сопротивления линии при разомкнутых (R_1 и R_2) и закороченных (r_1 и r_2) противоположных концах линии и получили значения $R_1=4$ Ом, $R_2=8$ Ом, $r_1=3,5$ Ом. Определить сопротивление утечки R_x , расстояние l до места повреждения, общую длину линии L , а также восстановить потерянное значение сопротивления r_2 . Сопротивление единицы длины каждого проводника линии, составляет $\rho=5,4\cdot 10^{-4}$ Ом/м.

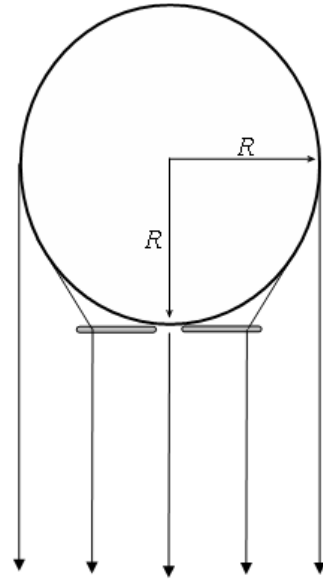
4. На деревянном колесе водяной мельницы радиусом $R=1$ м равномерно расположены N ($N=21$) ячеек для набора воды. Когда очередная ячейка проходит верхнее положение, в неї наливается (без начальной скорости относительно земли) вода массой $m=10$ кг. Когда ячейка проходит нижнее положение, вода выливается из неї, со скоростью движения крайних точек колеса (ячейки). Найдите установившуюся угловую скорость вращения колеса, не учитывая его массы и трения в оси, считая столкновение жидкости с ячейкой колеса. а) абсолютно упругим; б) абсолютно неупругим.

5. Три одинаковые пружины расположены между тремя горизонтальными пластинами. Система имеет ось симметрии, совпадающую с осью симметрии верхней пружины. На рис.4 система изображена в конечном положении. Сначала пластина 3 была подвижной, а две одинаковые гири массы m лежали на ней симметрично. В положении статического равновесия она была закреплена неподвижно на расстоянии a от пластины 1. После этого обе гири были переложены на подвижную пластину 2, которая, переместившись, остановилась на расстоянии b от пластины 1. Зная значения m , a , b , найти жесткость пружин k и их длину l в недеформированном состоянии. Пластины все время оставались горизонтальными. Массой и деформацией пластин пренебречь.

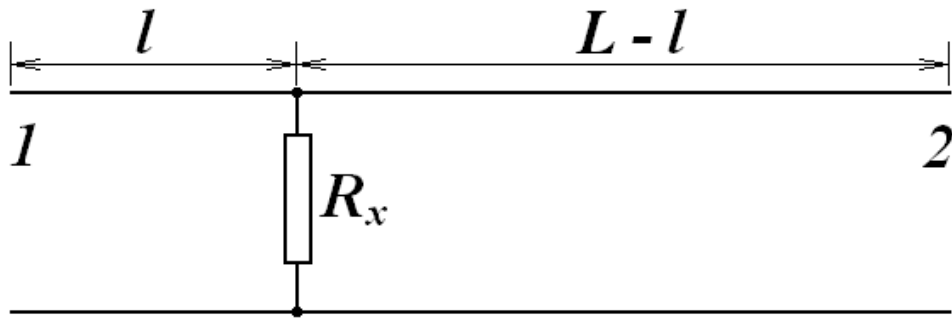
Задачи предложили О.Ю.Орлянський (1), С.У.Гончаренко (2-3), В.П.Сохацький (4), Б.Г.Кремінський (5).



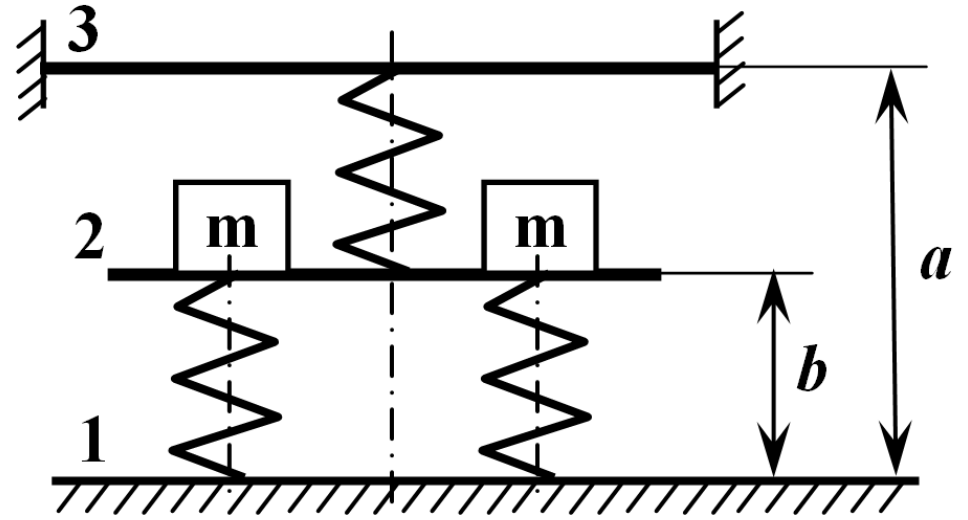
Мал. 1.



Мал. 2.



Мал. 3.



Мал. 4.

9.1. На фото (мал.1) – професор кафедри квантової макрофізики ДНУ В.С.Савчук. Вважаючи, що фото було зроблено з досить великої відстані, визначити: 1) яка вада зору у вченого – короткозорість чи далекозорість; 2) визначити з якомога більшою точністю оптичну силу лінз його окулярів; 3) як зміниться відповідь, якщо припустити, що фото було зроблено з близької відстані (поясніть). Відомо, що при виготовленні окулярів оптичні центри лінз розташовують навпроти зіниць очей, коли людина дивиться вдаль. Для виконання завдання скористуйтеся лінійкою та наведеною моделлю (мал.2), на якій схематично зображено голову людини, лінзи окулярів і хід променів (вигляд зверху). При розрахунках вважати, що $R=(10,0\pm 1,0)$ см. Оцінити точність розрахунків.

Розв'язок: Для розв'язання задачі необхідно за допомогою лінійки виміряти відстань L між краями голови, які можна побачити в очках та відстань l між зірницями (Рис. 1).

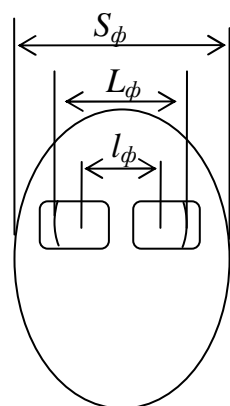


Рис.1.

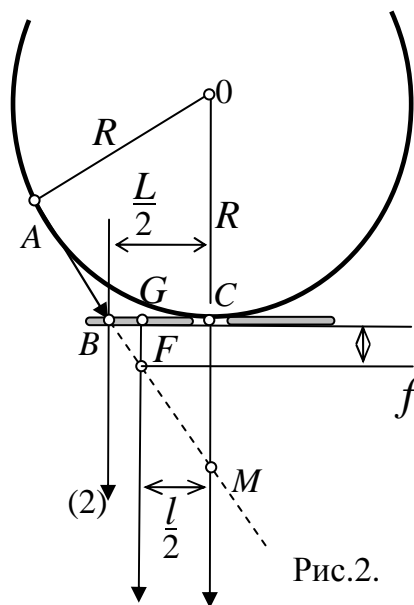


Рис.2.

Після нанесення цих величин на схему, отримаємо Рис. 2. Перетин променя (1), який іде від зірниці та продовження променя AB , який іде від краю голови, дають положення фокуса F лінзи окулярів. Із подібності – трикутників маємо:

$$\frac{h}{f} = \frac{L}{L-l}, \text{ де } h = MC \text{ та } f = FG$$

Враховуючи, що оптична сила $D = 1/f$, отримуємо

$$Dh = \frac{L}{L-l} \quad (1)$$

Із подібності трикутників $\triangle AOM$ і $\triangle MBC$

$$\frac{2h}{L} = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R} = \frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R} \quad (2)$$

Розв'язуючи (1) і (2) сумісно, отримуємо:

$$D = \frac{4R^2 - L^2}{2RL(L-l)}$$

Розміри L і l можна отримати помноживши відповідні розміри на фото L_ϕ і l_ϕ масштабний множник $2R/S_\phi$, де S_ϕ – поперечний розмір голови на фото. Тоді

$$D = \frac{S_\phi^2 - L_\phi^2}{2RL_\phi(L_\phi - l_\phi)}$$

Похибка оптичної сили: $\Delta D \approx D \left(\frac{2\Delta S_\phi}{(S_\phi - L_\phi)} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L_\phi}{L_\phi} + \frac{2\Delta L_\phi}{L_\phi - l_\phi} \right)$.

9.2 У калориметр з гарячою водою вкинули шматочок льоду, температура якого 0°C . Після встановлення теплової рівноваги температура води знизилася на $\Delta t_1=12^{\circ}\text{C}$. Коли в калориметр вкинули другий такий самий шматочок льоду, температура води знизилася ще на $\Delta t_2=10^{\circ}\text{C}$. На скільки градусів знизиться температура води, якщо в неї вкинути третій такий самий шматочок, який повністю розтане? Теплоємністю калориметра та теплообміном з навколишнім середовищем знехтувати.

Розв'язок:

Запишемо рівняння теплового балансу для першого випадку:

$$c \cdot M \cdot \Delta t_1 = \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot (t_1 - \Delta t_1) \quad (1)$$

де M – початкова маса води; m – маса шматочку льоду; λ – питома теплота плавлення льоду; c – питома теплоємність води; t_1 – початкова температура води.

Для другого шматочка можна записати аналогічне рівняння:

$$c \cdot (M+m) \cdot \Delta t_2 = \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot (t_1 - \Delta t_1 - \Delta t_2) \quad (2)$$

Для третього шматочка:

$$c \cdot (M+2m) \cdot \Delta t_3 = \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot (t_1 - \Delta t_1 - \Delta t_2 - \Delta t_3) \quad (3)$$

Від (2) віднімемо (1):

$$\frac{M}{m} = \frac{2 \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{2 \cdot 10}{12 - 10} = 10$$

Віднімаючи від (3) (2), отримуємо:

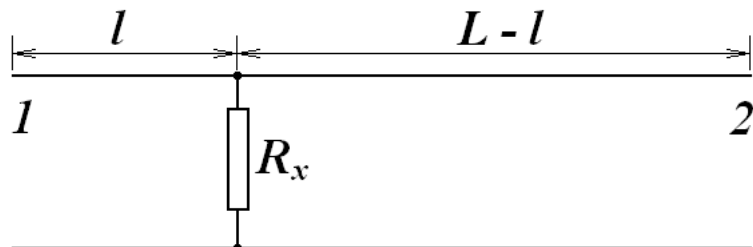
$$(M + 3m) \cdot \Delta t_3 = (M + m) \cdot \Delta t_2;$$

$$\Delta t_3 = \frac{(M + m)}{M + 3m} \cdot \Delta t_2;$$

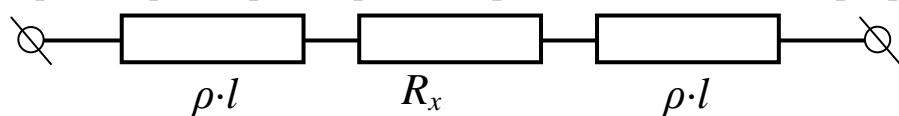
$$\Delta t_3 = 8,5^{\circ}\text{C}$$

9.3. У деякій точці двопровідної телефонної лінії невідомої довжини L сталося пошкодження, внаслідок якого між провідниками з'явився опір витоку R_x (мал.3). До обох кінців лінії прибули бригади (№1 та №2). Вони заміряли опори лінії при розімкнутих (R_1 і R_2) та закорочених (r_1 і r_2) протилежних кінцях лінії і отримали значення $R_1=4$ Ом, $R_2=8$ Ом, $r_1=3,5$ Ом. Визначити опір витоку R_x , відстань l до місця пошкодження, загальну довжину лінії L , а також відновити втрачене значення опору r_2 . Опір одиниці довжини кожного провідника лінії, складає $\rho=5,4 \cdot 10^{-4}$ Ом/м.

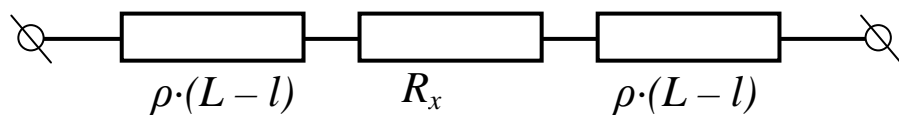
Розв'язок:



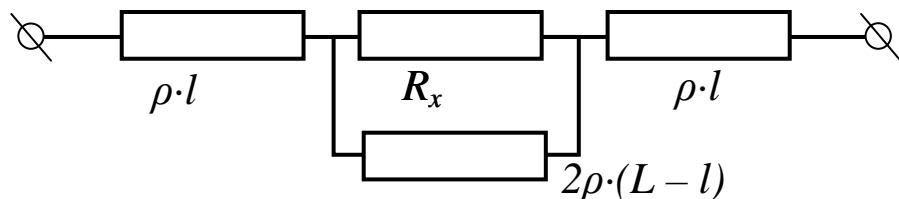
При замірах першої бригади принципові схеми для розрахунків:



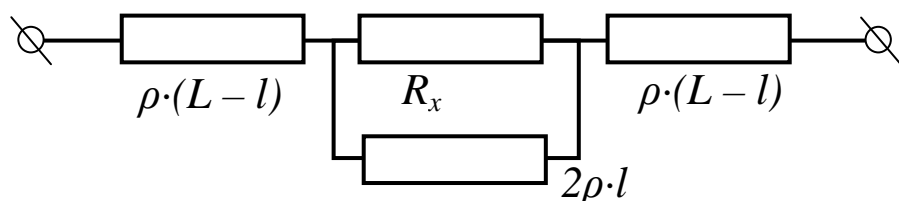
$$R_1 = 2l \cdot \rho + R_x$$



$$R_2 = 2(L-l) \cdot \rho + R_x$$



$$r_1 = 2 \cdot l \cdot \rho + \frac{R_x \cdot 2(L-l) \cdot \rho}{R_x + 2(L-l) \cdot \rho}$$



$$r_2 = 2 \cdot (L-l) \cdot \rho + \frac{R_x \cdot 2 \cdot l \cdot \rho}{R_x + 2 \cdot l \cdot \rho}$$

Розв'яжемо отриману систему (перших трьох рівнянь) та отримуємо:

$$R_x^2 = R_2 \cdot (R_1 - r_1); \quad l = \frac{(R_1 - R_x)}{2 \cdot \rho}; \quad L = \frac{(R_2 - R_x)}{2 \cdot \rho} - l$$

Звідки: $R_x = 2$ Ом; $l = \frac{l}{\rho} = \frac{1}{5,4 \cdot 10^{-4}} = 1850$ м; $L = \frac{4}{\rho} = \frac{4}{5,4 \cdot 10^{-4}} = 7400$ м;

$$r_2 = 2 \cdot (4 - 1) + \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2 + 2} = 7 \text{ Ом}$$

4. На дерев'яному колесі водяного млина радіусом $R=1\text{ м}$ рівномірно розміщені N комірок для набору води ($N=21$). Коли чергова комірка проходить у верхнє положення, в неї наливається (без початкової швидкості щодо землі) вода масою $m=10\text{ кг}$. Коли комірка проходить нижнє положення, вода виливається з неї зі швидкістю руху крайніх точок колеса (комірки). Знайдіть швидкість обертання колеса, що встановиться, не враховуючи його маси й тертя в осі, вважаючи зіткнення рідини з коміркою колеса: а) абсолютно пружним; б) абсолютно непружним.

Розв'язок:

1. При пружному зіткненні води з колесом не відбувається втрат енергії. Тому в стаціонарному режимі кожна порція води m додає колесу млину потенційну енергію $U = mg \cdot 2R$ і віднімає кінетичну енергію $W = \frac{mV^2}{2}$, де V – швидкість руху крайніх точок колеса. Рівність цих енергій обумовлює незмінність швидкості руху колеса: $mg \cdot 2R = \frac{mV^2}{2}$, звідки швидкість $V = \sqrt{4gR} \approx 6,3\text{ м/с}$; або кутова швидкість обертання $\omega = \frac{V}{R} \approx 6,3\text{ рад/с}$, або $n = \frac{V}{2\pi R} \approx 1\text{ об/с}$.

2. При непружному зіткненні відбуваються втрати механічної енергії – частина її перетворюється на тепло. Цю частину можна визначити, скориставшись законами збереження імпульсу (точніше кажучи, законом збереження моменту імпульсу). В цьому випадку, прирівнюючи імпульс (момент імпульсу) колеса з $(N-1)/2$ порціями води $((N+1)/2)$ призводить до аналогічного результату!) до імпульсу з $\left(\frac{(N-1)}{2} + 1\right)$ порціями, отримуємо вираз: $\frac{(N-1)}{2} \cdot mV = \left(\frac{(N-1)}{2} + 1\right) \cdot mV_1$ (V_1 – швидкість зовнішніх точок колеса після приєднання чергової порції води масою m), з якого отримаємо швидкість $V_1 = \frac{N-1}{N+1} \cdot V$, яку і використаємо для визначення втрат механічної енергії при непружному приєднанні порції води:

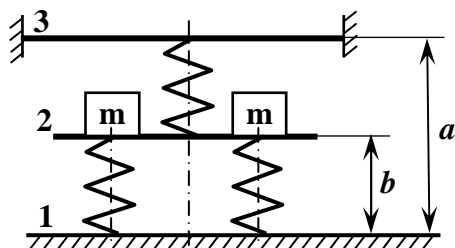
$$E = \frac{N-1}{2} \cdot \frac{mV^2}{2} - \left(\frac{N-1}{2} + 1\right) \cdot \frac{mV^2}{2} = \frac{mV^2}{4} \cdot \left(N-1 - \frac{(N-1)^2}{N+1}\right) \approx \frac{mV^2}{1,82} \approx \frac{mV^2}{2}$$

Прирівнюючи потенціальну енергію U , що набувається за один "цикл" до втрати кінетичної W та теплової енергії E : $U = W + E$, отримаємо лінійну швидкість руху порції води в комірці, або швидкість зовнішніх точок колеса: $mg \cdot 2R = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{1,82} \Rightarrow$

$V \approx \sqrt{1,9 \cdot gR} \approx 4,3\text{ м/с}$; відповідно швидкість обертання: $\omega = \frac{V}{R} \approx 4,3\text{ рад/с}$, або

$$n = \frac{V}{2\pi R} \approx 0,68\text{ об/с}$$

9.5 Три однакові пружини розміщені між трьома горизонтальними пластинами. Система має вісь симетрії, що співпадає з віссю симетрії верхньої пружини. На рисунку система зображена в кінцевому положенні. Спочатку пластина 3 була рухомою, а два однакові тягарі маси m лежали на ній симетрично. В положенні статичної рівноваги вона була закріплена нерухомо на відстані a від пластини 1. Після цього обидва тягарі були перекладені на рухому пластину 2, яка, перемістившись, зупинилася на відстані b від пластини 1. Знаючи значення m , a , b , знайти жорсткість пружин k та їх довжину l у недеформованому стані. Пластили весь час залишалися горизонтальними. Масою та деформацією пластин знехтувати.



Розв'язання.

Зобразимо систему в трьох характерних положеннях:

початковому (рис. 1), коли тягарі ще не покладені на пластину 3, $P=0$;

проміжному (рис. 2), коли під дією тягарів, що лежать на рухомій пластині 3, система набула статичної рівноваги, $P=2mg$;

кінцевому (рис. 3), коли пластина 3 закріплена, тягарі покладені на пластину 2 і вона досягла кінцевого положення статичної рівноваги.

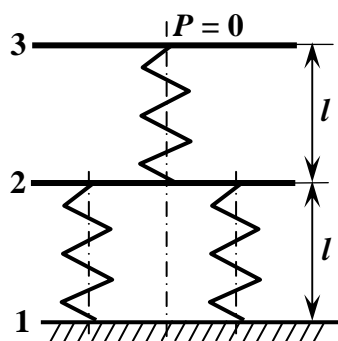


Рис. 1

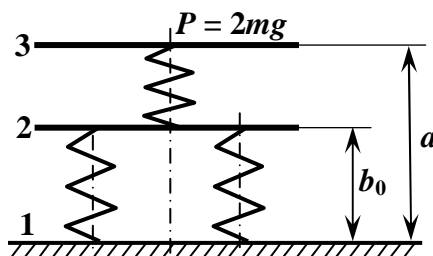


Рис. 2

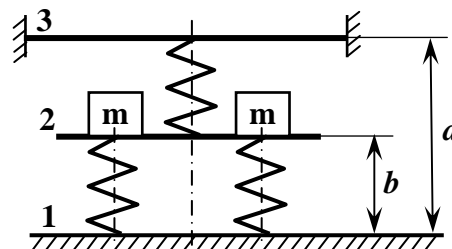


Рис. 3

При рухомій пластині 3 (рис.2) дві нижні пружини утворюють між собою паралельне з'єднання, а з верхньою пружиною ця пара з'єднана послідовно, бо на кожену групу пружин діє однакова сила $P=2mg$. Тому

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k},$$

де k_1 – зведена жорсткість системи: $k_1 = \frac{2}{3}k$.

Сумарна деформація системи у проміжному положенні

$$x = 2l - a.$$

З іншого боку,

$$x = \frac{2mg}{k_1} = \frac{2mg}{\frac{2}{3}k} \cdot 3 = \frac{3mg}{k}.$$

Таким чином, маємо рівняння

$$l = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3mg}{k} \right).$$

Розглянемо систему в кінцевому положенні (рис.3). Під дією тягарів пластина 2 перемістилася на величину $\Delta b = b_0 - b$, тому зведена жорсткість всієї системи

$$k_2 = \frac{2mg}{\Delta b} = \frac{2mg}{b_0 - b}.$$

Деформація кожної нижньої пружини дорівнює $(b_0 - b)$. Деформація верхньої пружини дорівнює $(a - b) - (a - b_0) = b_0 - b$, тобто всі три пружини деформовані однаково. Оскільки деформації всіх трьох пружин в даному випадку однакові, то пружини фактично утворюють паралельне з'єднання. Тому

$$k_2 = 3k.$$

Тоді

$$\Delta b = b_0 - b = \frac{2mg}{3k}.$$

Окрім того,

$$l - b_0 = \frac{2mg}{2k} = \frac{mg}{k}.$$

З виразів для Δb та $l - b_0$ маємо

$$l = b + \frac{mg}{k} + \frac{2mg}{3k} = b + \frac{5mg}{3k}.$$

Урахувавши раніше отримане рівняння для l , отримаємо

$$\frac{a}{2} + \frac{3mg}{2k} = b + \frac{5mg}{3k}.$$

Звідси

$$k = \frac{mg}{3(a - 2b)}.$$

Підставивши вираз для k у рівняння для l , одержимо відповідь

$$l = 5a - 9b.$$