

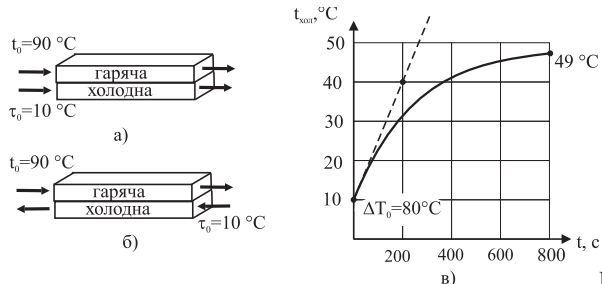
1. Необхідно максимально збільшити малий об'єкт за допомогою мікроскопа, що складається з двох тонких збирних лінз (об'єктива та окуляра), розташованих на одній оптичній осі. Предмет розташовують перед фокусом об'єктива. Як окуляр використовують лупу з фокусною відстанню 1 см. Дійсне зображення об'єкту в об'єктиві є предметом для окуляра. За технічними умовами об'єкт не може бути розташованим ближче, ніж 5 см від об'єктива. Відстань між об'єктивом і окуляром не може перевищувати 30 см. Знайдіть максимальне збільшення мікроскопу та побудуйте хід променів у такій системі.

2. Для використання теплоти, що міститься у відпрацьованій рідині, в теплотехніці використовують теплообмінники. Найпростіший теплообмінник являє собою два однакові, притиснуті один до одної мідні труби; через одну пропускають гарячу воду, через другу – холодну (мал. 1а,б). Для визначення властивостей такого теплообмінника його труби попередньо заповнили гарячою (90°C) і холодною (10°C) водою і побудували графік зміни температури холодної води з часом (мал. 1в). Використовуючи цей графік, розрахуйте, яку температуру холодної води на виході буде забезпечувати теплообмінник, якщо напрямки течії гарячої й холодної води в ньому: а) однакові (мал. 1а); б) протилежні (мал. 1б). Довжина кожної труби складає 8 м, швидкості течії гарячої й холодної води – 1 см/с, температура гарячої води на вході – 90°C, температура холодної води на вході – 10°C. В усіх випадках втрат тепла немає. Кількість теплоти, що передається за 1 с через 1см<sup>2</sup> площі від гарячої до холодної води, прямо пропорційна різниці їхніх температур.

3 На ободі невагомго колеса з нерухомою віссю радіусом  $R=1\text{м}$  рівномірно розміщені  $N=201$  комірок. В момент, коли кожна із комірок проходить верхнє положення, в неї опускають з нульовою початковою швидкістю відносно землі вантаж масою  $m=100\text{г}$ . В момент, коли комірка проходить нижнє положення, вантаж випадає з неї. Визначте лінійну швидкість комірок, яка встановиться. Тертям у вісі та опором повітря знехтувати.

4. Однорідний тонкий стержень, що лежить на нерухомій циліндричній поверхні, утримувався в горизонтальному положенні за допомогою нитки (мал. 2). Після перерізання нитки виявилось, що він став здійснювати повільно згасаючі коливання без проковзування. При цьому початковий максимальний кут відхилення стержня від горизонталі становив  $\alpha_{\text{max}}$ . Виразіть через  $\alpha_{\text{max}}$  кінцевий кут відхилення стержня від горизонталі  $\alpha_k$  після його зупинки. *Математична примітка:* якщо кут вимірюється в радіанах, то довжина  $l$  дуги кола радіуса  $R$  визначається просто:  $l=R\alpha$ , де  $\alpha$  – відповідний центральний кут.

5. Недосвідчений лаборант спаяв замкнуте коло з десяти батарейок «Альфа» і чотирнадцяти батарейок «Бета». Батареїки він брав у довільному порядку, але завжди з'єднував «плюс» з «мінусом». Верхній вольтметр, підключений до групи «Бета»-«Альфа»-«Бета» (мал.3), показує напругу 1,5 В. Яку напругу показує нижній вольтметр, підключений до групи «Альфа»-«Бета»-«Альфа»? Яку напругу покаже вольтметр, якщо його підключити до батарейки «Бета»? До батарейки «Альфа»?



Мал. 1.

Задачі запропонували В.П.Сохацький (1), Є.П.Соколов (2, 5), С.У.Гончаренко (3), А.П.Федоренко (4).

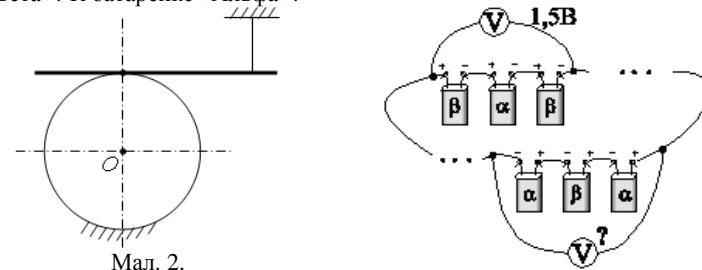
1. Необходимо максимально увеличить малый объект с помощью оптического микроскопа, который состоит из двух тонких собирающих линз (объектива и окуляра), расположенных на одной оптической оси. Предмет помещают перед фокусом объектива. В качестве окуляра используют лупу с фокусным расстоянием 1 см. Действительное изображение объекта в объективе является предметом для окуляра. По техническим условиям объект не может располагаться ближе, чем 5 см от объектива. Расстояние между объективом и окуляром не может превышать 30 см. Определите максимальное увеличение микроскопа и построите ход лучей в такой системе.

2. Для использования теплоты, содержащейся в отработанной жидкости, в теплотехнике используют теплообменники. Простейший теплообменник представляет собой две одинаковые, прижатые друг к другу медные трубы; по одной пропускают горячую воду, через другую – холодную (мал. 1а,б). Для определения свойств такого теплообменника его трубы предварительно заповнили горячей (90°C) и холодной (10°C) водой и построили график изменения температуры холодной воды со временем (рис.1в). Используя этот график, рассчитайте, какую температуру холодной воды на выходе будет обеспечивать теплообменник, если направления течения горячей и холодной воды в нем: а) одинаковы (рис.1а); б) противоположны (рис.1б). Длина каждой трубы составляет 8 м, скорости течения горячей и холодной воды – 1 см/с, температура горячей воды на входе – 90°C, температуру холодной воды на входе – 10°C. Во всех случаях потери тепла отсутствуют. Количество теплоты, передаваемое за 1с через 1см<sup>2</sup> площади от горячей воды к холодной, прямо пропорционально разности их температур.

3. На ободе невесомого колеса с неподвижной осью радиусом  $R=1\text{м}$  равномерно размещены  $N=201$  ячеек. В момент, когда каждая из ячеек проходит верхнее положение, в нее опускают с нулевой начальной скоростью относительно земли груз массой  $m=100\text{г}$ . В момент, когда ячейка проходит нижнее положение, груз выпадает из нее. Определите установившуюся линейную скорость ячеек. Трением в оси и сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Однородный тонкий стержень, лежащий на неподвижной цилиндрической поверхности, удерживался в горизонтальном положении с помощью нити (рис. 2). После перерезания нити оказалось, что он стал совершать медленно затухающие колебания без проскальзывания. При этом первоначальный максимальный угол отклонения стержня от горизонталі составил  $\alpha_{\text{max}}$ . Выразите через  $\alpha_{\text{max}}$  конечный угол отклонения стержня от горизонталі  $\alpha_k$  после его остановки. *Математическое примечание:* если угол измеряется в радианах, то длина  $l$  дуги окружности радиуса  $R$  определяется просто:  $l=R\alpha$ , где  $\alpha$  – соответствующий центральный угол.

5. Неопытный лаборант спаял замкнутую цепь из десяти батареек «Альфа» и четырнадцать батареек «Бета». Батареїки он брал в произвольном порядке, но всегда соединял «плюс» с «минусом». Верхний вольтметр, подключенный к группе «Бета»-«Альфа»-«Бета» (рис. 3), показывает напряжение 1,5 В. Какое напряжение показывает нижний вольтметр, подключенный к группе «Альфа»-«Бета»-«Альфа»? Какое напряжение покажет вольтметр, если его подключить к батарейке «Бета»? К батарейке «Альфа»?



Мал. 2.

Мал. 3.

Задачі предложили В.П.Сохацький (1), Є.П.Соколов (2, 5), С.У.Гончаренко (3), А.П.Федоренко (4).

## РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ №1 9 КЛАС

- 1) Хід променів і побудова зображення предмета у мікроскопі представлені на рис.1. Як видно з рисунку, промені побудови зображення предмету у об'єктиві утворюють подібні трикутники  $O_1AB$  і  $O_1A_1B_1$ , з яких отримуємо збільшення зображення предмету  $A_1B_1/AB = \Gamma_1 = f_1/d_1$ . При цьому  $d_1 \geq F_{об}$  за умовою задачі, а відстань зображення від окуляра має бути менше  $f_2 \leq 1$ , бо інакше окуляр буде розглядати уявний об'єкт. Звідси максимальне збільшення об'єктива можна оцінити як  $\Gamma_{1max} \approx 1/F_{об}$ .
- 2) Остаточне зображення предмету у мікроскопі формує окуляр, який виконує роль лупи по відношенню до зображення предмету у об'єктиві. Для цього необхідно, щоб зображення предмету у об'єктиві розташовувалось між лінзою окуляра і її фокусом, що відповідає умові  $d_2 < F_{ок}$ . За цих умов зображення у окулярі буде уявним, а оптимальною відстанню від окуляру буде відстань найкращого бачення  $f_2 = \Delta = 25\text{см}$ . Скористаємося формулою тонкої лінзи  $1/d_2 - 1/\Delta = 1/F_{ок}$ , і запишемо збільшення окуляра, що дорівнює  $A_2B_2/A_1B_1 = \Gamma_2 = \Delta/d_2 = (\Delta + F_{ок})/F_{ок}$ . Оскільки  $\Delta \gg F_{ок}$ , то  $\Gamma_{max} \approx \Delta/F_{ок}$ .
- 3) Максимальне збільшення зображення предмету системою лінз мікроскопу дорівнює  $A_2B_2/AB = \Gamma_1 \times \Gamma_2 = \Delta \times 1/F_{об} \times F_{ок} = 30 \times 25/5 = 150$ .
- 4) Більш строга оцінка дає  $f_1 = l - d_2 = l - \Delta \times F_2 / (\Delta + F_2) = 30 - 25/26 \approx 29\text{см}$ , тоді  $d_1 = F_1 \times f_1 / (f_1 - F_1) = 5 \times 29 / (29 - 5) \approx 6\text{см}$ , а  $\Gamma_{max} = f_1 \times \Delta / d_1 \times d_2 = 29 \times 25 / 6 \approx 121$ .

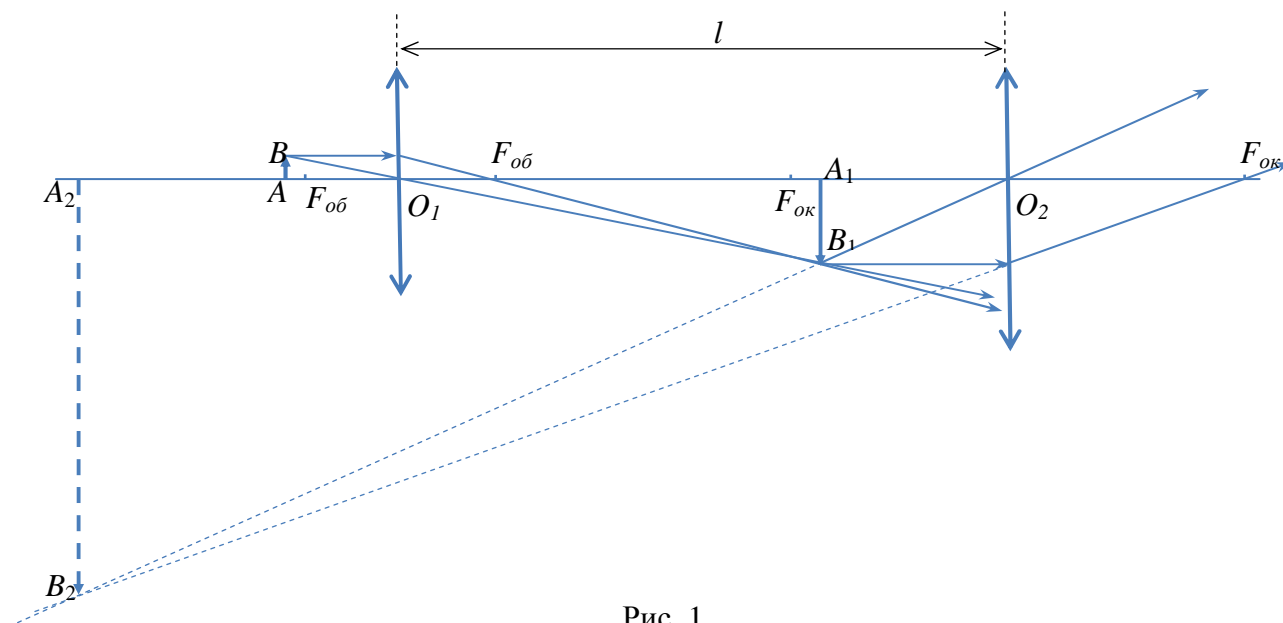
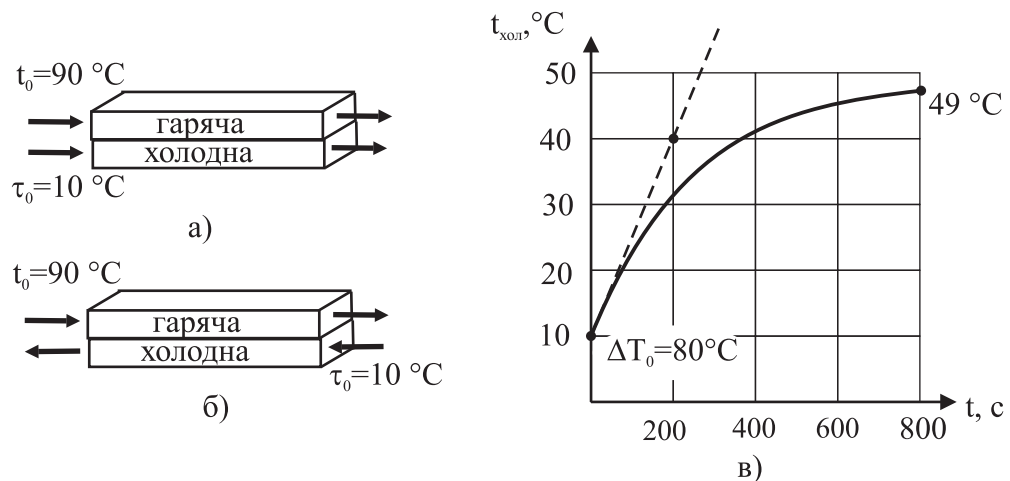


Рис. 1.

## Завдання про теплообмінники із прямим і зворотним струмом №2.

Для того, щоб теплота, що утримується у відпрацьованій рідині не пропадала, в теплотехніці використовуються теплообмінники. Найпростіший теплообмінник являє собою два однакові, притиснуті один до одної мідні труби, через одну з яких пропускають гарячу воду, а через другу – холодну (мал. 1а,б).

Для визначення робочих властивостей такого теплообмінника, його труби попередньо заповнили гарячої ( $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) і холодною водою ( $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) і побудували графік зміни температури холодної води з часом (мал.1в). (Малюнок робочий, тому проектувальники на ньому залишили деякі замітки.)



Мал.1

Використовуючи цей графік, розрахуйте, яку температуру холодної води на виході буде забезпечувати цей теплообмінник, якщо напрямки течії гарячої й холодної води в ньому:

- однакові («Теплообмінник прямого струму», мал.1а);
- протилежні («Теплообмінник зворотного струму», мал.1б).

Для розрахунків прийняти довжину кожної труби рівної 8 метрів, швидкість течії гарячої й холодної води однакової й рівної  $1\text{ cm/s}$ , температуру гарячої води на вході рівної  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ , температуру холодної води на вході рівної  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Уважати, що у всіх випадках втрат тепла немає, і що потік тепла від гарячої до холодної води прямопропорціонален різниці їхніх температур.

## Розв'язання.

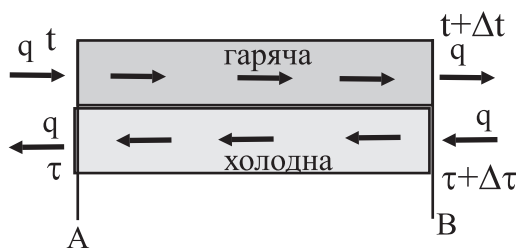


температур приведена на малюнку 2.

а) В «Теплообміннику прямого струму» кожен рідкий елемент холодної води рухається разом з тим самим елементом гарячої рідини час  $t = \ell / V = 800 \text{ с}$ . За графіком 1в визначаємо, що за цей час холодна вода нагріється до  $49^\circ\text{C}$ . Загальна картина розподілу

б) Аналіз «Теплообмінника зворотного струму» набагато складніше. Головне тут установити наступний факт: *якщо витрати гарячої й холодної води однакові, то різниця температур між гарячою й холодною водою у всіх перерізах однакова!*

Доведемо цей факт. Роздивимося на малюнку 3а довільний елемент теплообмінника АВ.



а)



б)

Мал.3

Рівняння балансу тепла для цього елемента теплообмінника (за одиницю часу) має вигляд:

$$q \cdot c \cdot t + q \cdot c \cdot (\tau + \Delta\tau) = q \cdot c \cdot \tau + q \cdot c \cdot (t + \Delta t),$$

де  $t(x)$  – температура гарячої води,  $\tau(x)$  – температура холодної води,  $q$  – витрати води в кожній трубці,  $c$  – теплоємність води.

Звідси одержуємо

$$\Delta t = \Delta\tau,$$

т. ч. зміна температури гарячої води на будь-якій ділянці теплообмінника в точності дорівнює зміні температури холодної води. Виходить, у кожному

перерізі різниця температур між гарячою й холодною водою однакова. Позначимо цю різницю через  $\Delta T$ . Використовуючи цю, поки невідому, величину, ми можемо записати для температури холодної води на виході (мал. 3б):

$$\tau_{\text{вих}} = t_0 - \Delta T,$$

тут  $t_0 = 90^\circ\text{C}$  – температура гарячої води на вході.

Знайдемо  $\Delta T$ , використовуючи експериментальний графік 1в.

Розглянемо на ньому початкову точку, для якої початкова температура холодної води дорівнює  $\tau_0 = 10^\circ\text{C}$ . Відзначимо, що при цьому різниця між температурою холодної й гарячої води в цій точці складає  $\Delta T_0 = 80^\circ\text{C}$ .

Проведемо дотичну до графіка в цій точці.

Вона показує, як би змінювалася температура холодної води якби різниця між її температурою й температурою гарячої води залишалася б постійною й рівною  $\Delta T_0 = 80^\circ\text{C}$ .

За графіком читаємо, що за 200 секунд холодна вода нагрілася б до температури  $40^\circ\text{C}$ , тобто на  $30^\circ\text{C}$ . Значить за 800 секунд, за час руху холодного елемента води в теплообміннику, вона нагрілася б на  $\Delta t_0 = 120^\circ\text{C}$ .

Складаємо рівняння для ключової невідомої величини  $\Delta T$ .

Якщо при постійній різниці температур рівної  $\Delta T_0 = 80^\circ\text{C}$  холодна вода нагрілася б за час руху на  $\Delta t_0 = 120^\circ\text{C}$ , то при різниці температур  $\Delta T$ , нагрівання складе величину  $\Delta t = \Delta t_0 \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{120}{80} \cdot \Delta T$ . З іншого боку це нагрівання повинен дорівнювати  $(t_0 - \tau_0 - \Delta T) = (80^\circ\text{C} - \Delta T)$ . Разом одержуємо рівняння:

$$\Delta t_0 \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = (t_0 - \tau_0 - \Delta T).$$

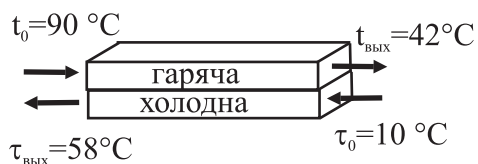
Або в числах:

$$\frac{120}{80} \cdot \Delta T = (80^\circ\text{C} - \Delta T).$$

Звідси для різниці температур одержуємо:

$$\Delta T = \frac{80}{200} \cdot 80^\circ\text{C} = 32^\circ\text{C}.$$

Тепер ми можемо одержати відповідь: в «Теплообміннику зі зворотним струмом» температура колишньої холодної води на виході буде дорівнювати  $\tau_{\text{вих}} = t_0 - \Delta T = 58^\circ\text{C}$ . Загальний розподіл температур у теплообміннику показан на малюнку 4.



Мал.4

Відзначимо, що теплообмінник зі зворотним струмом дозволяє здійснювати більш ефективний відбір тепла у відпрацьованій рідині. У нашому випадку температура нагрітої *холодної* води більше, ніж температура охолодженої *гарячої* води.

Відповідь: а)  $\tau_{\text{вих}} = 49^\circ\text{C}$ ; б)  $\tau_{\text{вих}} = 58^\circ\text{C}$ .

#### Задача №3 (9 клас)

Рассмотрим процесс попадания очередного груза в ячейку, как столкновение малой покоящейся массы  $m$  со значительно большей массой  $M \approx Nm/2$  (колесо с частично заполненными ячейками), имеющей скорость  $v$ .

$$Mv = (M + m)u.$$

$$u = \frac{M}{M + m}v.$$

После столкновения кинетическая энергия колеса уменьшается – выделяется теплота

$$Q = \frac{Mv^2}{2} - \frac{(M + m)u^2}{2} \approx \frac{mv^2}{2}.$$

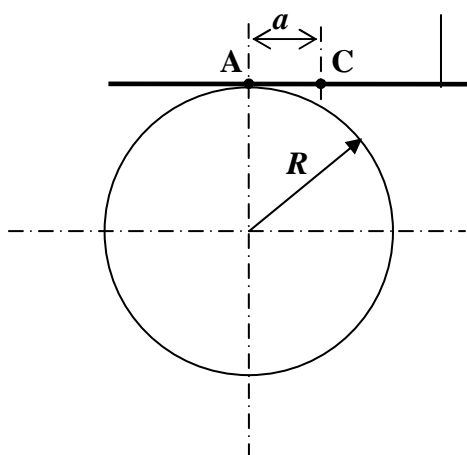
Любое количество грузов общей массой  $m_0$  с помощью вращающегося колеса постепенно опускается на высоту  $h = 2R$ . Их потенциальная энергия превращается в кинетическую и теплоту, рассмотренную ранее

$$m_0g2R = \frac{m_0v^2}{2} + Q_0 = m_0v^2.$$

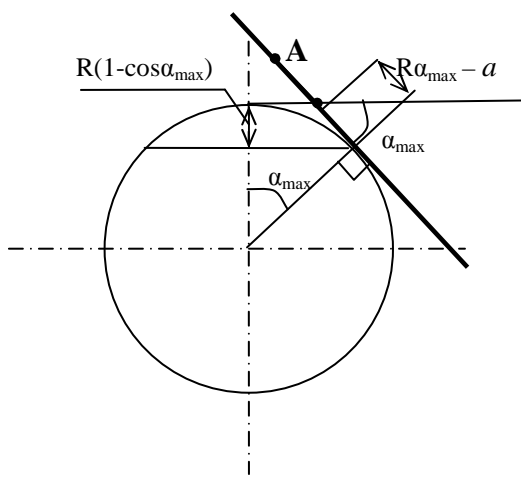
Окончательно получаем

$$v = \sqrt{2gR} \approx 4,48 \text{ м/с}.$$

**Розв'язок задачі № 4 (9 клас).**

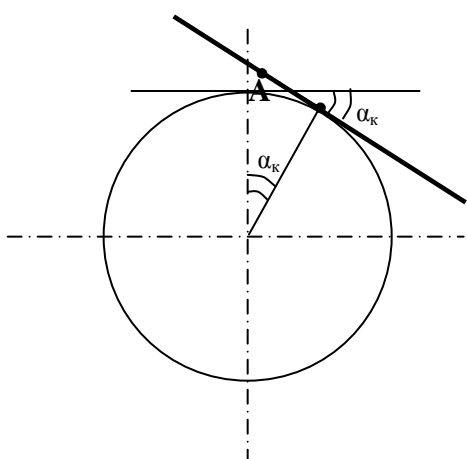


A – точка на стержні, в якій він торкається циліндра, знаходячись у горизонтальному положенні; C – центр мас стержня;  $AC = a$ .



Центр мас C повернувся майже на ту саму висоту (втратами енергії при першому відхиленні знехтуємо). Тоді з геометрії:

$$R(1 - \cos\alpha_{\max}) = (R\alpha_{\max} - a) \sin\alpha_{\max} \quad (1)$$



Після згасання коливань центр мас стержня співпадатиме з точкою торкання з циліндром (умова рівноваги).

Звідки:  $a = R\alpha_k \quad (2)$

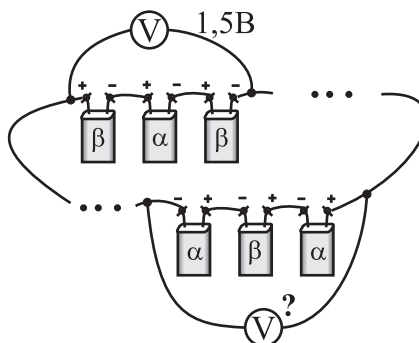
Підставляючи (2) в (1) і скорочуючи на R, одержимо:

$$1 - \cos\alpha_{\max} = (\alpha_{\max} - \alpha_k) \sin\alpha_{\max} .$$

Звідки:  $\alpha_k = \alpha_{\max} - (1 - \cos\alpha_{\max})/\sin\alpha_{\max} = \alpha_{\max} - \text{tg}(\alpha_{\max}/2)$ .

### Завдання «Двадцять чотири батарейки» №5

Недосвідчений лаборант спаяв замкнений ланцюг з десяти батарейок «Альфа» і чотирнадцяти батарейок «Бета». Батарейки він брав у довільному порядку, але завжди з'єднував «плюс» з «мінусом».



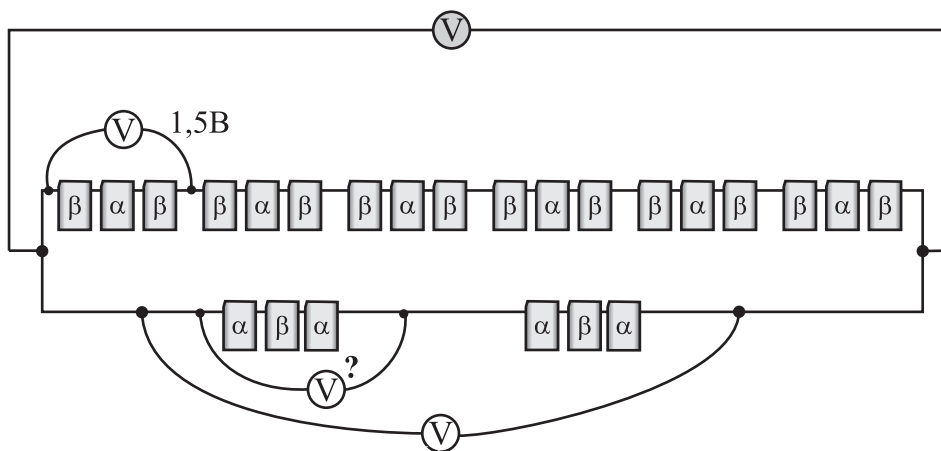
Мал.1

Верхній вольтметр, що підключень до групи «Бета»-«Альфа»-«Бета» (мал.1), показує напругу 1,5 В.

- 1) Яку напругу показує нижній вольтметр, що підключень до групи «Альфа»-«Бета»-«Альфа»?
- 2) Яку напругу покаже вольтметр, якщо його підключити в батарейці «Бета»?
- 3) Яку напругу покаже вольтметр, якщо його підключити в батарейці «Альфа»?

### Розв'язання 1 «Макроскопічне»

1) Перегрупуємо батарейки, що не входять в «зону дії вольтметрів», так, щоб утворилося шість груп «Бета»-«Альфа»-«Бета» і дві групи «Альфа»-«Бета»-«Альфа» (мал.2).



Мал.2



Сірий і білий вольтметри, що підключені до точок з'єднання груп, показують однакову напругу. При цьому показання сірого вольтметра рівні  $U_c = 6 \cdot U_{\beta\alpha\beta}$ , а білого –  $U_6 = 2 \cdot U_{\alpha\beta\alpha}$ . Отримуємо рівняння:

$$2 \cdot U_{\alpha\beta\alpha} = 6 \cdot U_{\beta\alpha\beta}.$$

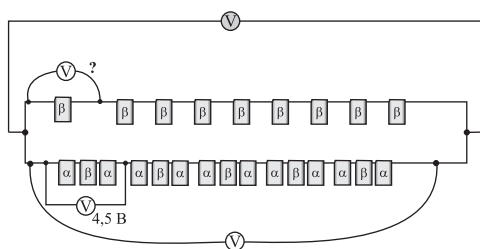
Звідси перша відповідь:  $U_{\alpha\beta\alpha} = 3 \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 4,5 \text{ В}$

2) Розташуємо батарейки так, щоб утворилося п'ять груп «Альфа»-«Бета»-«Альфа» і дев'ять елементів «Бета» (мал.3).

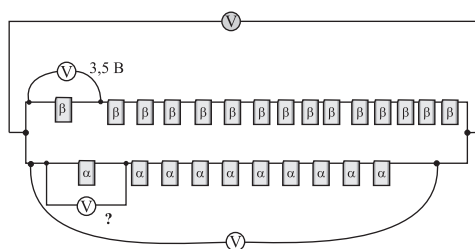
Показання сірого й білого вольтметрів однакові, - звідси друге рівняння:

$$9 \cdot U_{\beta} = 5 \cdot U_{\alpha\beta\alpha}.$$

Друга відповідь:  $U_{\beta} = \frac{5}{9} \cdot U_{\alpha\beta\alpha} = \frac{5}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 2,5 \text{ В}$ .



Мал.3



Мал.4

3) Розташуємо батарейки один по одному: чотирнадцять батарейок «Бета» і десять батарейок «Альфа» (мал.4).

Показання сірого й білого вольтметрів однакові, звідси рівняння:

$$10 \cdot U_{\alpha} = 14 \cdot U_{\beta}.$$

Третя відповідь:  $U_{\alpha} = \frac{7}{5} \cdot U_{\beta} = \frac{7}{9} \cdot U_{\alpha\beta\alpha} = \frac{7}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 3,5 \text{ В}$

Відповіді: 1)  $U_{\alpha\beta\alpha} = 3 \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 4,5 \text{ В}$ ; 2)  $U_{\beta} = \frac{5}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 2,5 \text{ В}$ ; 3)  $U_{\alpha} = \frac{7}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 3,5 \text{ В}$ .

## Розв'язання 2 «Мікроскопічне»

Тепер нашим першим кроком буде третій крок попереднього розв'язання:

$$14 \cdot |U_{\beta}| = 10 \cdot |U_{\alpha}|.$$

Тобто напруги на батарейках кожного виду зв'язані співвідношенням:

$$|U_{\beta}| = \frac{5}{7} \cdot |U_{\alpha}|$$

Варто врахувати, що для того щоб алгебраїчна сума напруг у циклі була б рівною нулю, одне з напруг має знак «+», а інше - «-».

Для відомої напруги  $U_{\beta\alpha\beta}$  отримуємо:

$$U_{\beta\alpha\beta} = |2 \cdot |U_{\beta}| - |U_{\alpha}|| = \frac{3}{7} \cdot |U_{\alpha}|.$$

Для напруги  $U_{\alpha\beta\alpha}$  аналогічно:

$$U_{\alpha\beta\alpha} = |2 \cdot |U_{\alpha}| - |U_{\beta}|| = \frac{9}{7} \cdot |U_{\alpha}|.$$

Звідси випливають всі відповіді:

$$|U_{\alpha}| = \frac{7}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 3,5 \text{ B},$$

$$|U_{\beta}| = \frac{5}{7} \cdot |U_{\alpha}| = 2,5 \text{ B},$$

$$U_{\alpha\beta\alpha} = \frac{9}{7} \cdot |U_{\alpha}| = 4,5 \text{ B}.$$

Відповіді: 1)  $U_{\alpha\beta\alpha} = 3 \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 4,5 \text{ B}$ ; 2)  $U_{\beta} = \frac{5}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 2,5 \text{ B}$ ; 3)  $U_{\alpha} = \frac{7}{3} \cdot U_{\beta\alpha\beta} = 3,5 \text{ B}$ .