

1. Неоднорідний стержень довжиною L має одну точку опори B (рис. 1) і утримується в горизонтальному положенні з допомогою вертикальної сили, що прикладається в точці C . Відомо, що при двох різних положеннях точки опори, коли $AB=x_1$ та $AB=x_2$ ($x_1 > x_2$) для забезпечення горизонтального положення стержня потрібно прикласти однакою за величиною силу: $F_1=F_2=F$. Знайти положення центра тяжіння x_0 відносно точки A та масу стержня m при відомих x_1 , x_2 , F , L .

2. Від круглого сонця за допомогою квадратного дзеркальця можна пускати сонячні зайчики. Такий зайчик за певних умов може мати форму подібну або до дзеркальця, або до сонця. Поясніть причину зміни форми сонячного зайчика. Пояснення проілюструйте малюнком. Вертикальний екран розташуємо перпендикулярно до сонячного променя, відбитого квадратним дзеркальцем. А дзеркальце – під кутом 30° до горизонту так, що дві його горизонталі сторони перпендикулярні до відбитого променя. Визначте освітленість E у центрі цього сонячного зайчика при відстанях $R_1 = 5$ м і $R_2 = 15$ м між дзеркальцем та екраном (відповіді виразити у одиницях освітленості E_0 , яку створюють прямі сонячні промені на перпендикулярному до них екрані). Розміри дзеркальця 10 см \times 10 см, кут, під яким видно диск сонця, $\alpha = 0,5^\circ$. Втрати сонячної енергії під час відбиття променів знехтувати.

3. Вам необхідна пружина жорсткістю 300 Н/м, але у вашому розпорядженні є тільки пружини жорсткістю 500 Н/м і легкі дротяні стержні (див. рис.2), які можна використовувати для з'єднання цих пружин. Запропонуйте спосіб отримання необхідної жорсткості, використовуючи мінімальну кількість пружин. Стержні можна розрізати і робити на них петельки для з'єднання. Псувати пружини забороняється. Наведіть розрахунки і зробіть схематичне зображення конструкції.

4. Замкнена лижна траса має довжину 5 км. У парних змаганнях на 20 км беруть участь команди з двох учасників, які на двох мають тільки одну пару лиж. Перемагає та команда, яка першою збереться на фініші після проходження кожним учасником чотирьох повних кругів. Час команди реєструється по останньому спортсмену, який дістає фінішу. Розрахуйте найменший час, за який може фінішувати наймолодша команда з двох однокласників і наведіть приклад можливого розкладу руху, якщо швидкості, з якими хлопчик і дівчинка йдуть без лиж сніжною трасою, $v_x=6$ км/год і $v_d=5$ км/год, а швидкості, з якими вони пересуваються на лижах, $v_x=15$ км/год і $v_d=20$ км/год, відповідно. Одночасно користуватися лижами може тільки одна людина. Користуватися лижами іншої команди заборонено.

5. Важкий ланцюжок підвішений між точками A й B (рис.3а). Точки C й D ділять ланцюжок на три рівні частини, а точки K й M ділять на три рівні частини відрізок AB . Для того щоб з'єднати точку C із точкою K (рис.3б), потрібно виконати роботу $A_1 = 12$ Дж. Яку роботу необхідно виконати, щоб після цього підняти точку D до точки M (рис.3в)?

Задачі запропонували: А.П.Федоренко (1), О.Ю.Орлянський (2-4), Є.П.Соколов (5).

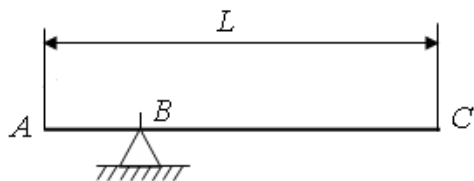


Рис. 1

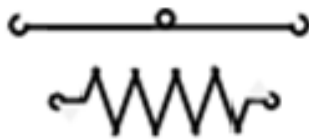


Рис. 2

1. Неоднородный стержень длиной L имеет одну точку опоры B (рис. 1) и удерживается в горизонтальном положении с помощью вертикальной силы, приложенной в точке C . Известно, что при двух разных положениях точки опоры, когда $AB=x_1$ та $AB=x_2$ ($x_1 > x_2$) для обеспечения горизонтального положения стержня необходимо приложить одинаковую по величине силу: $F_1=F_2=F$. Найти положение центра тяжести x_0 относительно точки A и массу стержня m при известных x_1 , x_2 , F , L .

2. От круглого солнца с помощью квадратного зеркала можно посылать солнечные зайчики. Такой зайчик при определенных условиях может иметь форму, подобную либо зеркальцу, либо солнцу. Объясните причину изменения формы солнечного зайчика. Объяснения проиллюстрируйте рисунком. Вертикальный экран расположим перпендикулярно к солнечному лучу, отраженному квадратным зеркальцем, а само зеркальце – под углом 30° к горизонту так, что две его горизонтальные стороны перпендикулярны к отраженному лучу. Определите освещенность E в центре этого солнечного зайчика на расстояниях и между зеркальцем и экраном (ответы записать в единицах освещенности E_0 , которую создают прямые солнечные лучи на перпендикулярном к ним экране). Размеры зеркальца 10 см \times 10 см, угол, под которым видно солнце, $\alpha = 0,5^\circ$. Потерями солнечной энергии при отражении лучей можно пренебречь.

3. Вам необходима пружина жесткостью 300 Н/м, но в вашем распоряжении есть только пружины жесткостью 500 Н/м и легкие проволочные стержни (см.рис.2), которые можно использовать для соединения этих пружин. Предложите способ получения необходимой жесткости, используя минимальное количество пружин. Стержни можно разрезать и делать на них петельки для соединения. Портить пружины запрещается. Приведите расчеты и схематично изобразите конструкцию.

4. Замкнутая лыжная трасса имеет длину 5 км. В парных соревнованиях на 20 км участвуют команды из двух участников, которые на двоих имеют только одну пару лыж. Побеждает та команда, которая первой соберется на финише после прохождения каждым участником четырех полных кругов. Время команды регистрируется по последнему спортсмену, пришедшему к финишу. Рассчитайте наименьшее время, за которое может финишировать младшая команда из двух одноклассников и приведите пример возможного расписания движения, если скорости, с которыми мальчик и девочка идут без лыж по снежной трассе, $v_x=6$ км/час и $v_d=5$ км/час, а скорости, с которыми они движутся на лыжах, $v_x=15$ км/час и $v_d=20$ км/час, соответственно. Одновременно пользоваться лыжами может только один человек. Пользоваться лыжами другой команды запрещено.

5. Тяжелая цепочка подвешен между точками A и B (рис.3а). Точки C и D делят цепочку на три равные части, а точки K и M делят на три равные части отрезок AB . Для того, чтобы соединить точку C с точкой K (рис.3б) требуется совершить работу $A_1 = 12$ Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы после этого поднять точку D к точке M (рис.3в)?

Задачи предложили: А.П.Федоренко (1), О.Ю.Орлянський (2-4), Е.П.Соколов (5).

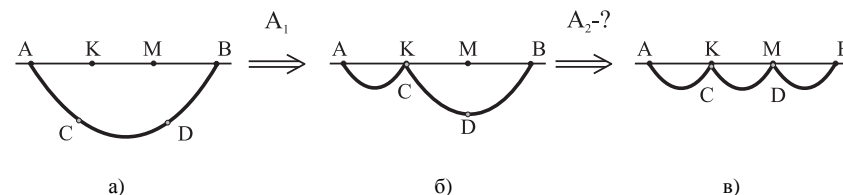


Рис.3

Задача № 1

8 клас

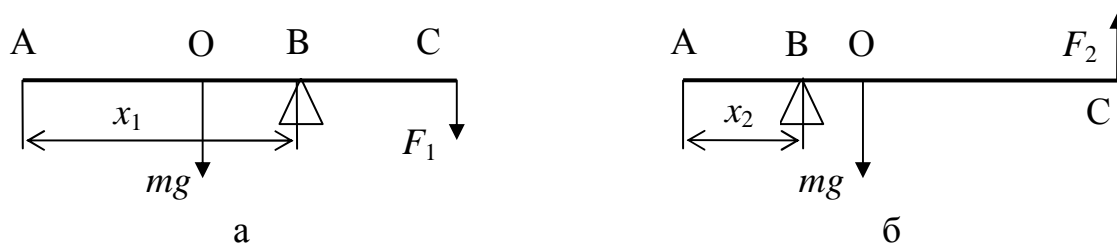


Рис. 1

Для рівноваги коли опора (т. В) зміщена від центра тяжіння (т. О) у бік точки С ($x_1 > x_0$ на рис. 1а) момент сили тяжіння повинен бути скомпенсований моментом сили F_1 , що спрямована донизу –

$$F_1(L - x_1) = mg(x_1 - x_0).$$

Звідки

$$F_1 = mg \frac{(x_1 - x_0)}{(L - x_1)}. \quad (1)$$

При рівновазі, коли опора ближча до точки А ($x_2 < x_0$ на рис. 1б) момент сили тяжіння компенсується моментом сили F_2 , що спрямована догори –

$$F_2(L - x_2) - mg(x_0 - x_2) = 0,$$

або

$$F_2 = mg \frac{(x_0 - x_2)}{(L - x_2)}. \quad (1)$$

За умовою $F_1 = F_2 = F$. Тоді прирівнюючи праві частини (1) і (2)

$$mg \frac{(x_1 - x_0)}{(L - x_1)} = mg \frac{(x_0 - x_2)}{(L - x_2)}.$$

Звідки знаходимо положення центра тяжіння

$$x_0 = \frac{L(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{2L - (x_1 + x_2)} \quad (3)$$

Так як F відома, то масу можна знайти як із (1) так і з (2). В обох випадках з урахуванням (3) отримуємо

$$m = \frac{2L - (x_1 + x_2)F}{x_1 - x_2} \cdot \frac{1}{g}.$$

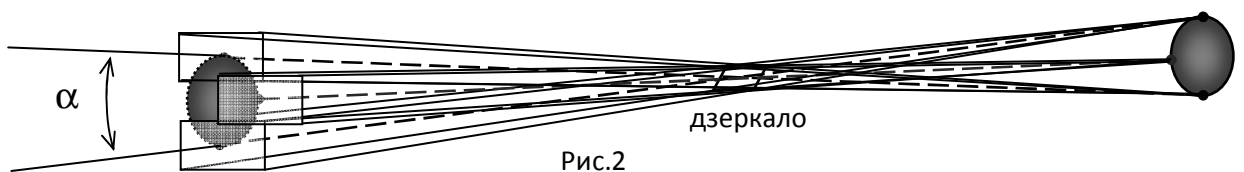
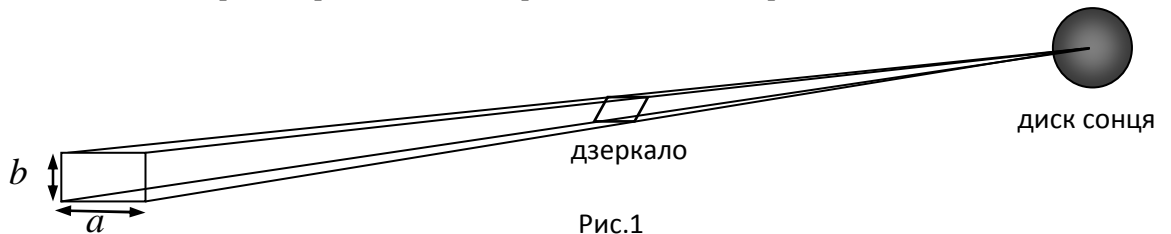
Задача № 2 Сонячні зайчики

Від круглого сонця за допомогою квадратного дзеркальця можна пускати сонячні зайчики. Такий зайчик за певних умов може мати форму подібну або до дзеркальця, або до сонця. Поясніть причину зміни форми сонячного зайчика. Пояснення проілюструйте малюнком. Вертикальний екран розташуємо перпендикулярно до сонячного променя, відбитого квадратним дзеркальцем. А дзеркальце – під кутом 30° до горизонту так, що дві його горизонталі сторони перпендикулярні до відбитого променя. Визначте освітленість E у центрі цього сонячного зайчика при відстанях $R_1 = 5$ м і $R_2 = 15$ м між дзеркальцем та екраном (відповіді виразити у одиницях освітленості E_0 , яку створюють прямі сонячні промені на перпендикулярному до них екрані). Розміри дзеркальця $10\text{ см} \times 10\text{ см}$, кут, під яким видно диск сонця, $\alpha = 0,5^\circ$. Втратами сонячної енергії під час відбиття променів знехтувати.

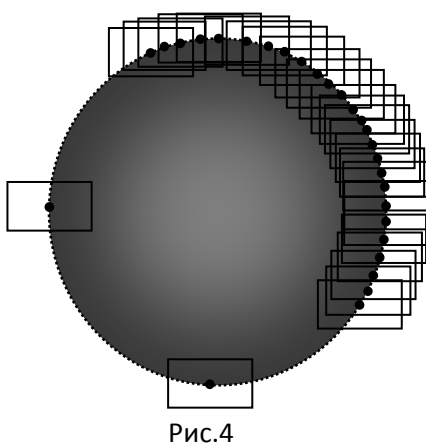
Розв'язок. Як відомо, зображення у плоскому дзеркалі будується симетричним (дзеркальним) відбиттям предмету у площині дзеркала. Далі ми просто проводимо промені від зображення крізь дзеркало, неначе зображення це реальний предмет, який знаходиться у якомусь задзеркаллі, а дзеркало – віконце у цей задзеркальний світ. Така техніка побудови променів є зручною, і ми нею скористаємося. Замість променів від сонця, що відбиваються від дзеркальної поверхні, будемо проводити прямі промені від зображення сонця крізь «отвір» дзеркала.

Перший спосіб. Світловий потік від кожної точки поверхні сонця проходить крізь дзеркало у вигляді піраміди (див. рис.1). Оскільки відстань до Сонця дуже велика, промені у цій піраміді практично паралельні і у перпендикулярному перерізі екрану мають вигляд прямокутника зі сторонами $a = 10$ см і $b = a/2 = 5$ см (катет навпроти кута нахилу дзеркала у 30°).

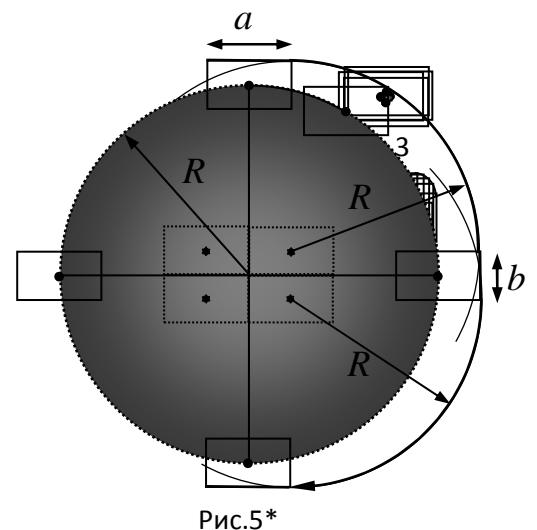
Розглянемо обмежені отвором дзеркала світлові піраміди від кожної крайньої точки сонця. Після



проходженні крізь дзеркало центральні промені цих пірамід будуть утворювати конічну поверхню з вершиною у центрі дзеркала (див. рис.2).



Отже, якщо екран поблизу, малий кут $\alpha = 0,5^\circ$, під яким видно диск сонця, не дозволяє розійтися цим прямокутникам, і вони накладаються один на другий, утворюючи на



екрані прямокутник світлової плями з трохи розмитими краями (рис.3).

Якщо екран далеко, крайні прямокутники утворюють собою фігуру, яка сприймається як коло (рис.4). Якщо відстань десь посередині, маємо фігуру проміжної форми (рис.5), обмежену згори і знизу відрізками довжиною 10 см, зліва і справа – відрізками по 5 см і по кутам – розпливчастими круговими дугами (рис. 5*).

Другий спосіб. Розглянемо світлові потоки від усього сонячного диску, що проходять через окремі точки прямокутного отвору 10 см×5 см, і мають вигляд конічних поверхонь з кутом α . (див. рис.7).

З усіх таких світлових конусів зосередимо увагу на тих, чії вершини дотикаються до сторін отвору і далі на екрані формують границі світлової плями (рис.8). Центральні промені усіх конусів виходять з центру Сонця і можуть вважатися паралельними внаслідок величезної відстані

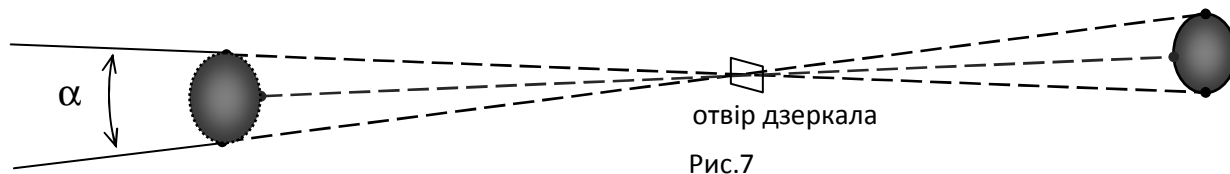


Рис.7

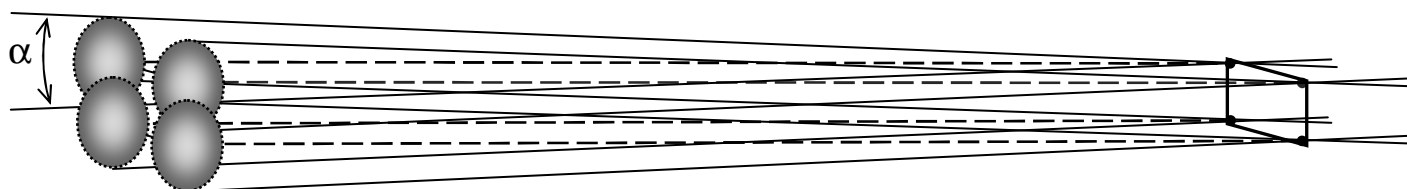


Рис.8

до Сонця. Тоді на поверхні екрану точки центральних променів утворюватимуть такий самий прямокутник зі сторонами $a = 10$ см і $b = 5$ см.

Якщо екран поблизу, малий

$\alpha = 0,5^\circ$, під яким видно диск сонця, не дозволяє розійтися світловим кругам навколо цих точок, і ми отримуємо прямокутник світлової плями з трохи розмитими краями (рис.9). Якщо екран далеко, світлові кола мають значні радіуси і те, що їх центри лежать на невеликому прямокутнику вже не впливає на загальної форми світлової плями (рис.10). Якщо ж відстань десь фігуру проміжної форми (рис.11), обмежену згори і знизу відрізками по $a = 10$ см, зліва і справа –

відрізками по $b = 5$ см і по кутам – круговими дугами радіусами $R = \frac{\pi}{720} r$,

де r – відстань від дзеркала до екрану. Остання формула отримана з наступних міркувань: діаметр $2R$ світлового кола на віддаленому екрані у

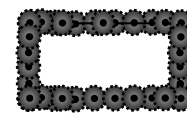


Рис.9

кут

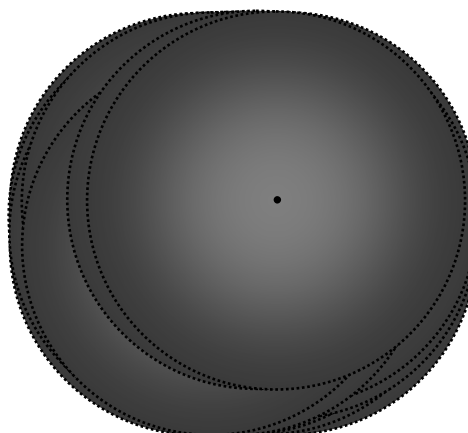


Рис.10

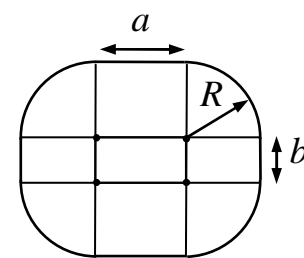


Рис.12

наше сприйняття як великого кола посередині, маємо

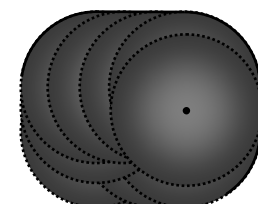


Рис.11

стільки разів менший за довжину кола $2\pi r$, у скільки кут $0,5^\circ$ менший за 360° . Рис.12 наочно демонструє справжню форму світлового зайчика, пропорції якої можуть змінюватись, але складові (чотири відрізки і чотири чверть кола) залишаються

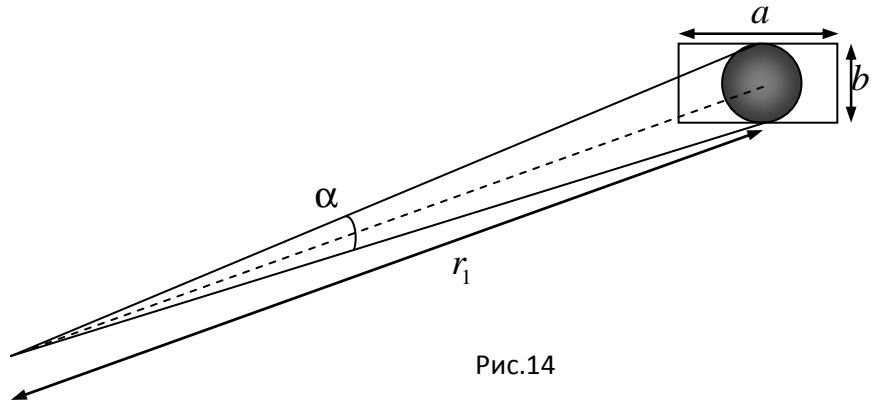


Рис.14

незмінними. Якщо повернути екран або дзеркальце, форма сонячного зайчика буде змінюватись між схожою на сплюснуте коло (еліпс) на великих відстанях і чотирикутника – на незначних. Тепер розберемося з освітленістю. Ми вже розглядали точки на поверхні сонячного диску (як джерела світлового потоку) і точки в прямокутнику дзеркала (як маленькі отвори на шляху світла). Тепер розглянемо точки на поверхні екрану, як споживачів світлового потоку. Оскільки за умовою задачі нас цікавить центральна точка світлової плями на екрані, будемо дивитися з неї на сонце крізь «отвір» дзеркала. Коли відстань r до дзеркала мала, ми бачимо з цієї точки сонце повністю

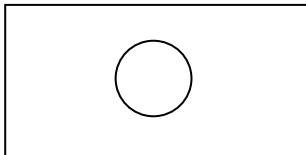


Рис.13

(рис.13). Отже всі промені від сонця попадають у точку, і освітленість дорівнює E_0 . Це продовжується, поки дзеркальце, віддаляючись від екрану, не зменшиться у розмірах до дотику з верхніми краями сонячного диску (відстань $r_1 = \frac{360}{\pi} b \approx 5,73$ м, рис.14). Тобто на відстані 5 м

освітленість E буде дорівнювати E_0 . Після $r_1 \approx 5,73$ м освітленість буде зменшуватись, оскільки вже не всі промені від сонячного диску

досягатимуть точки на екрані. Вважаючи яскравість диску однаковою вздовж всієї його поверхні, отримаємо: освітленість E пропорційна площі S тієї частини сонячного диску, яку ми бачимо крізь прямокутник дзеркала.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{S}{\pi R^2}, \text{ де } R = \frac{\pi}{720} r \text{ – радіус проекції сонця на прямокутник дзеркала. Послідовна}$$

зміна картинки, яку ми спостерігаємо з центру сонячного зайчика, зображена на рис.15-18.

Дзеркальце стане на вигляд меншим ніж сонце, коли діагональ прямокутника співпаде з діаметром сонячного диску ($r \approx 12,8$ м,

рис.17). Після цього освітленість стає обернено пропорційною до квадрату відстані r :

$$E = \frac{ab}{\pi R^2} E_0 = \frac{720^2 ab}{\pi^3} \frac{E_0}{r^2}. \text{ Ця}$$

залежність зберігатиметься і на більших відстанях, коли дзеркальце буде обмежувати маленьку частинку диску сонця. Тобто, на відстані $r_2 = 15$ м освітленість E буде дорівнювати $E_2 = 0,372 E_0$.

Звичайно, для отримання максимального балу не треба було проводити всі наведені розрахунки, або

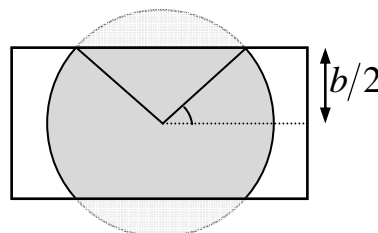


Рис.15

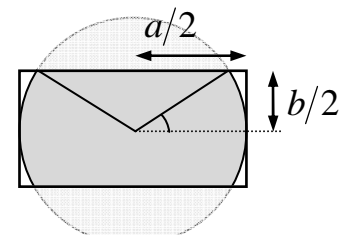


Рис.16

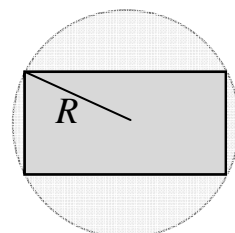


Рис.17

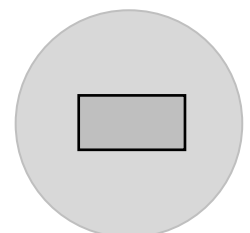


Рис.18

малювати велику кількість рисунків. Для визначення освітленості можна було просто порівняти кути, під якими видно отвір дзеркальця, з кутом $0,5^\circ$, під яким видно диск сонця. Справжню форму зайчика можна було не з'ясовувати, обмежившись поясненням двох крайніх випадків. У даній задачі можна углядіти аналогію з тим, що спостерігається у камері-обскура.

Як бачимо, фізика допомагає нам розуміти навколишній світ у його простих і складних проявах. Головне не пасувати перед труднощами.

Ще один підхід до цієї задачі.

1. Хід променів сонця до екрану зображено на рис.1 відповідно до умови.
 2. На цьому ж рисунку виконана побудова зображення сонця у дзеркальці.
- Далі будемо працювати з цим зображенням

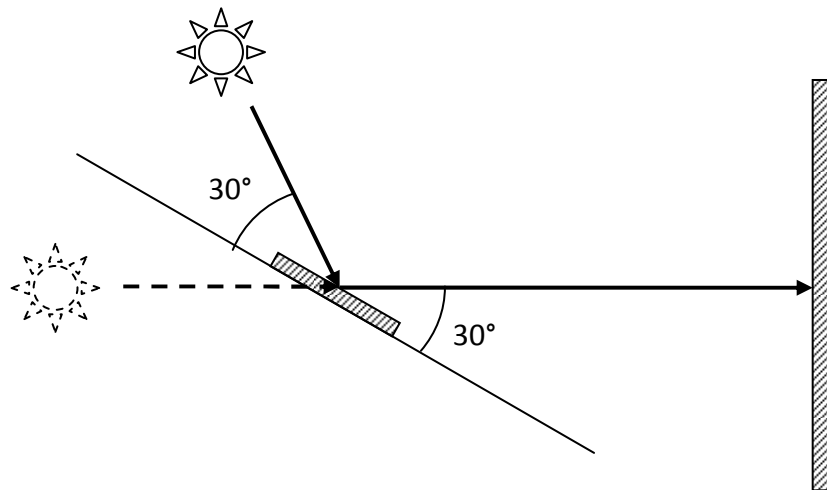


Рис.1

3. По відношенню до зображення дзеркальце виконує роль отвору, але цей отвір буде вже не квадратним, а прямокутним (за рахунок нахилу). На рис.2 показано, що висота такого уявного отвору буде $b = a \cdot \sin 30^\circ = 5$ см, а ширина залишиться $a = 10$ см. Діагональ цього прямокутника буде мати найбільший лінійний розмір $c = (10^2 + 5^2)^{1/2} = 11,8$ см.

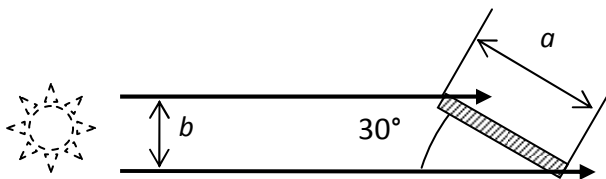


Рис.2

4. За аналогією з камерою обскура зобразимо пучки, що виходять з двох діаметрально протилежних точок сонячного диску, і проходять через краї нашого отвору (рис.3).

5. З рисунку видно, що у його площині обидва пучки перетинаються в межах трикутника, що опирається на дзеркало. Кут при вершині O є кутом, під яким видно диск сонця. Відстань точки O від отвору дорівнює $x = v / \tan \alpha = v / \alpha$ де кут має бути записаний в радіанах. Остаточно $x = 5 \cdot 180 / 0,5\pi = 573$ см $= 5,73$ м.

6. На екрані, розміщеному в межах відстані x від отвору, сонячний зайчик матиме форму отвору, а його освітленість у центрі дорівнюватиме E_0 .

7. На відстані, більшій ніж X , на екрані починає формуватись зображення сонця. Але до тих пір, поки пучки від діаметрально розташованих точок сонячного диску будуть перекриватись за рахунок максимального лінійного розміру отвору s , зайчик не матиме круглу форму.

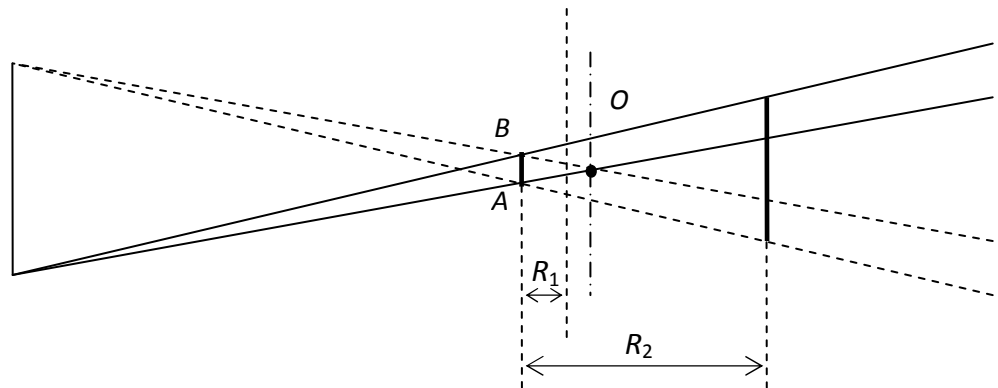


Рис.3

8. Знайдемо відстань Y точки O_1 від отвору, за якою на екрані буде повне зображення сонця.

$$Y = 11,8 \cdot 180 / 0,5\pi = 1281 \text{ см} = 12,81 \text{ м}$$

9. Таким чином, на відстані $R_1 = 5$ м, яка менша за x , освітленість на екрані буде такою ж, як на дзеркалі-отворі $E_1 = E_0$.

10. Відстань $R_2 = 15$ м, і вона більше за Y . Тому зайчик матиме округлу форму, а освітленість можна порахувати з виразу $E_0 \cdot a \cdot b = E_2 \cdot \pi r^2$, де r - радіус зайчика на екрані. Оскільки лінійні розміри отвору-дзеркальця набагато менші за відстань від нього до екрану, можна вважати, що ми бачимо зайчик на екрані з дзеркала під кутом α . Звідси $r = R_2 \cdot \alpha$. Тоді $E_2 = E_0 \cdot a \cdot b / \pi (R_2 \cdot \alpha)^2 = 0,372 E_0$.

Задача № 3

Вам необхідна пружина жорсткістю 300 Н/м, але у вашому розпорядженні є тільки пружини жорсткістю 500 Н/м і легкі дротяні стержні (див. рис.), які можна використовувати для з'єднання цих пружин. Запропонуйте спосіб отримання необхідної жорсткості, використовуючи мінімальну кількість пружин. Стержні можна розрізати і робити на них петельки для з'єднання. Псувати пружини забороняється. Наведіть розрахунки і зробіть акуратний рисунок конструкції.

Розв'язок.

При послідовному з'єднанні пружин додаються обернені величини $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots$ (1),

а при паралельному – самі жорсткості $k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots$ (2)

$$\text{Отже } \frac{k}{k_0} = \frac{3}{5} \text{ або } k = \frac{3k_0}{5} = 3 \cdot \frac{k_0}{5} = 300 \frac{H}{m}.$$

З останнього рівняння знаходимо, що необхідно взяти 7 пружин і скласти схему (рис.1). На рисунку АВ і CN є стержні. Причому OA=OB=CD=DN.

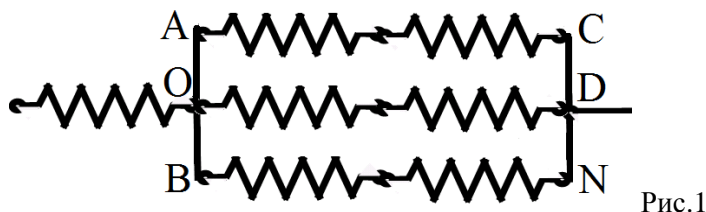


Рис.1

Зрозуміло, що жорсткість системи, яка подана на рис. 2, також дорівнює k .

$$\text{Це дійсно буде так, якщо } \frac{MC}{DM} = \frac{PO}{TP} = \frac{l_2}{l_1} = 2 \quad (3)$$

Дану умову отримують, розглянувши рівновагу, наприклад, стержня ТО. Плечі сил, які діють на нього, будемо знаходити відносно точки Р. Крім того, положення точок М і Р на стержнях CD та ОТ повинно бути таким, щоб видовження частин системи DT і СО при її деформації були

однаковими. Нехай це видовження дорівнює x . Тоді $k_0 x l_1 = \frac{k_0}{2} x l_2$. Звідси відразу витікає умова

(3), тобто $l_2 = 2l_1$. На основі рис 2. видно, що потрібну систему можна створити на основі чотирьох пружин.

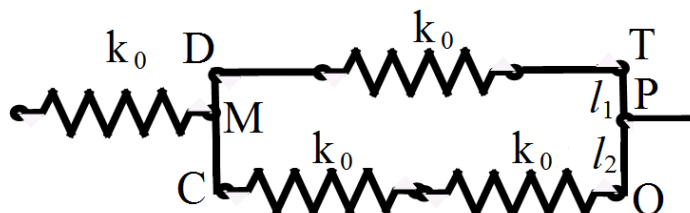


Рис.2

Загалом можна запропонувати систему, яка буде складатися з двох пружин (рис. 3), причому вона

буде мати жорсткість $k = 300 \frac{H}{m}$. На цьому рисунку CD і NP – стержні однакової довжини. М,

А, D, Р – точки приєднання до стержнів; CM=NA= l_1 ; CD=NP= l_2 . Якщо тепер до точок С і N прикласти однакові за величиною сили F , які будуть діяти у протилежних напрямках, то буде здійснюватися деформація цієї системи. Причому пружина МА буде видовжуватися, а пружина DP – стискатися. Напрямки дії цих сил будемо вважати перпендикулярними до стержнів.

Величина F така, що деформацію системи можна вважати малою.

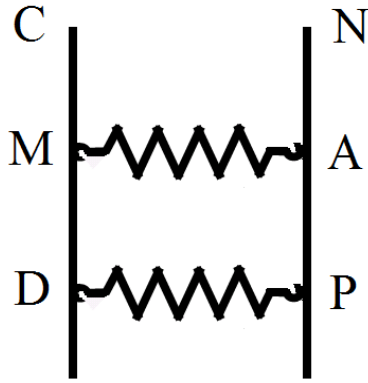


Рис. 3.

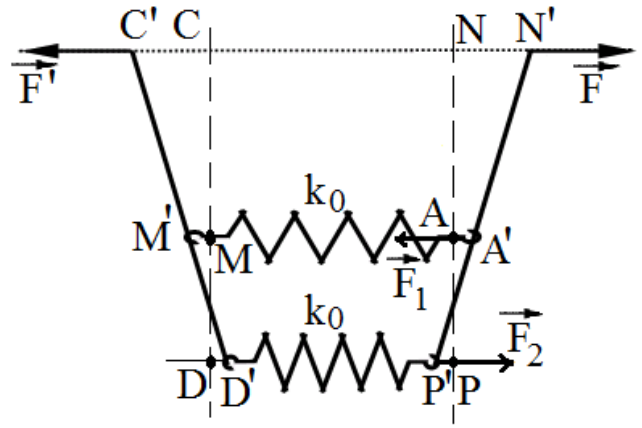


Рис.4.

На рис 4 зображена ця система у деформованому стані . Тут C', N', M', A', D', P' положення точок C, N, M, A, D, P . Нехай $NN' = x$. Значення $2kx$ має сенс величини деформації нашої системи: $|\vec{F}'| = |\vec{F}| = F = 2kx$ Тут k – потрібна жорсткість системи.

Будемо вважати, що $AA' = x_1$; $P'P = x_2$

Розглянувши умови рівноваги стержня $N'P'$ запишемо систему рівнянь:

$$2kx + 2k_0x_2 = 2k_0x_1 \quad (4)$$

$$2k_0l_1x_1 = 2k_0x_2l_2, \quad (5)$$

$$2kxl_1 = 2k_0(l_2 - l_1)x_2, \quad (6)$$

$$\frac{x_2 + x}{l_2} = \frac{x_2 + x_1}{l_2 - l_1} \quad (7)$$

Рівняння (7) одержано з геометричних міркувань . Рівність (4) записана на основі того, що сили F і F_2 повинні бути урівноважені силою F_1 . Формула (5) отримана виходячи з того, що плечі сил F_1 і F_2 розраховуються відносно точки N' . У випадку рівняння (6) плечі сил F і F_2 знаходимо відносно точки A' .

Якщо розв'язати систему рівнянь (4)-(7) то одержимо:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{(n - 1)^2}{n^2 + 1}, \quad (8)$$

Тут $n = \frac{l_2}{l_1}$. У нас $\frac{k}{k_0} = \frac{3}{5}$, тому

$$n = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \quad (9)$$

Система, яку ми розглянули має тільки дві пружини. Вона має сенс, коли довжина стержнів менша половини довжини пружини.

При відповідній довжині стержнів можна зробити систему, яка буде мати потрібну жорсткість і складатися тільки з однієї пружини. Приклад такої системи показано на рисунку 5.

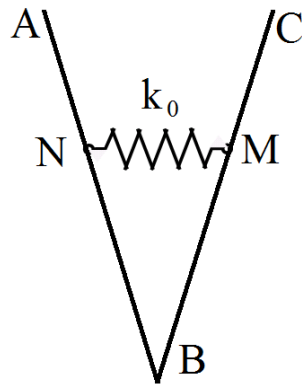


Рис. 5

На ньому АВ і СВ – стержні, які в точці В з'єднані шарнірно. В точках N і М пружина приєднана до стержнів. Якщо до точок А і С прикласти однакові за величиною сили, які діють у протилежних напрямках, то система перейде у деформований стан. Будемо вважати, що ці сили діють паралельно пружині. Тоді, розглянувши рівновагу, наприклад, стержня ВС, знаходимо, що

потрібна жорсткість k системи буде досягнута при $\frac{CB}{MB} = \sqrt{\frac{k_0}{k}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$. (10)

Задача № 4

Розв'язок. По-перше, слід максимально використати лижі. По-друге, фінішувати хлопчик і дівчинка повинні разом, інакше тому, хто фінішував першим, слід було менше користуватися лижами на користь того, хто відстав на фініші, адже результат фіксується по останньому. Позначимо через t_x і t_d час, протягом якого їхали на лижах, відповідно, хлопчик і дівчинка. Зрозуміло, що

$$t_x + t_d < t, \quad (1)$$

де t – загальний час руху. Позначимо довжину замкненої дільниці через $S = 5$ км. Тоді для руху хлопчика і дівчинки отримаємо

$$\begin{cases} v_x t_x + u_x (t - t_x) = 4S, \\ v_d t_d + u_d (t - t_d) = 4S. \end{cases} \quad (2)$$

Нам потрібне ще одне рівняння, а саме відстань, яку подолали лижи. Чим більшу відстань пройдуть лижи – тим краще, оскільки це означає, що меншу відстань школярі долатимуть пішки. Припустимо, що лижи пройшли повні n дільниць по $S = 5$ км. Тоді

$$v_x t_x + v_d t_d = nS. \quad (3)$$

Чим більше n , тим краще. Звісно, можна підібрати найбільше можливе n (зрозуміло, що $n < 8$ і починати потрібно з $n = 7$). Але ми спробуємо все розрахувати. Виразимо з рівнянь (2) час руху на лижах хлопчика і дівчинки

$$\begin{cases} t_x = \frac{4S - u_x t}{v_x - u_x}, \\ t_d = \frac{4S - u_d t}{v_d - u_d} \end{cases} \quad (4)$$

та підставимо в (3), звідки знайдемо загальний час руху

$$t = S \frac{4 \left(\frac{v_x}{v_x - u_x} + \frac{v_d}{v_d - u_d} \right) - n}{\frac{v_x u_x}{v_x - u_x} + \frac{v_d u_d}{v_d - u_d}} = \frac{3}{10} (12 - n) \text{ год.}$$

Тоді $t_x = \frac{9n - 8}{45}$ год, $t_d = \frac{3n + 4}{30}$ год. Підставимо все в (1) і отримаємо обмеження на n :

$$n < \frac{164}{27} = 6 \frac{2}{27}.$$

Отже найбільше можливе $n = 6$, $t_x = \frac{46}{45}$ год, $t_d = \frac{11}{15}$ год, а найменший час руху

$$t = 1,8 \text{ год} = 1 \text{ год } 48 \text{ хв.}$$

Розклад руху може бути, наприклад, таким:

1. Дівчинка стартує на лижах, за $t_d = \frac{11}{15}$ год проходить відстань $v_d t_d = 14\frac{2}{3}$ км, тобто майже три кола, двічі обганяючи хлопця, після чого залишає лижи і далі йде пішки. Їй залишається пройти $20 \text{ км} - 14\frac{2}{3} \text{ км} = 5\frac{1}{3} \text{ км}$ зі швидкістю $u_d = 5 \text{ км/год}$, тобто ще $1\frac{1}{15}$ год, а це у сумі з $t_d = \frac{11}{15}$ год якраз і складає 1,8 год.
2. Хлопець у момент часу $t_d = \frac{11}{15}$ год, коли дівчина залишила йому лижі, пройшов $u_x t_d = 4\frac{2}{5} \text{ км}$ і знаходився на відстані $\frac{4}{15} \text{ км} \approx 267 \text{ м}$ позаду них. Через час $t' = \frac{2}{45}$ год він дістається лиж і далі до кінця змагання рухається на лижах зі швидкістю $v_x = 15 \text{ км/год}$, долаючи відстань $15\frac{1}{3} \text{ км}$, що залишилась, за час $t'' = 1\frac{1}{45}$ год. Як бачимо, зальний час руху хлопця $t_d + t' + t'' = 1,8$ год знову таки збігається з t .

Зазначимо, що якби хлопець і дівчина, виходячи із здорового глузду, тримали один одного в полі зору, після кожного обгону залишаючи іншому лижі, то, навіть нехтуючи додатковими затримками на знімання й одягання лиж, відповідь була б на третину (36 хвилин!) більшою. Дійсно, у цьому випадку $n = 4$ і

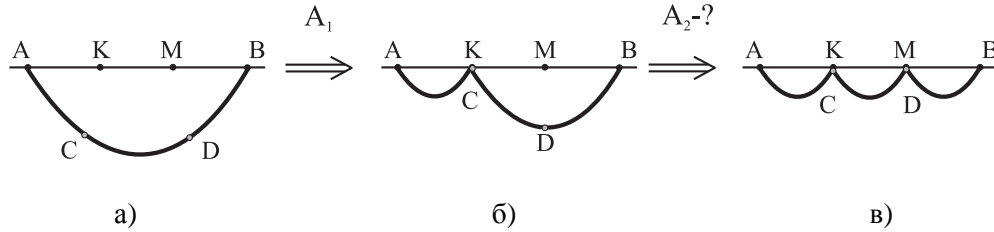
$$t = 2,4 \text{ год} = 2 \text{ год } 24 \text{ хв.}$$

Саме таким був би найменший час, якби траса була прямою і не можна було заставити лижі пробігти більше 20 км (у нашому випадку пробіг 30 км).

Задача № 5

Задача про ланцюжок 1.

Важкий ланцюжок підвішений між точками A й B (рис.1а). Точки C й D ділять ланцюжок на три рівні частини, а точки K й M ділять на три рівні частини відрізок AB .



Мал. 1

Для того щоб з'єднати точку C із точкою K (мал.1б), потрібно зробити роботу $A_1 = 12 \text{ Дж}$. Яку роботу необхідно зробити, щоб після цього підняти точку D до точки M (рис.1в)?

Розв'язання.

Ланцюжки, які зображені на малюнках 1а й 1б, можна розглядати як комбінацію менших ланцюжків, *подібних* вихідному. Скористаємося цим, щоб підрахувати потенційну енергію $E_p = mgh_{ц.м.}$ кожної з них. Нехай потенційна енергія вихідного ланцюжка дорівнює $E_1 = -m_1gh_1$ (висоту, а точніше «глибину», відраховуємо від рівня AB). Тоді енергія ланцюжка, довжина якого становить $\ell_2 = 2/3 \cdot \ell_1$, дорівнює

$$E_{2/3} = -m_2gh_2 = -\frac{4}{9}m_1gh_1 = \frac{4}{9}E_1.$$

(Його маса й усі розміри, у тому числі висота центру мас, у $2/3$ раза менша, ніж у вихідного ланцюжка).

Аналогічно отримуємо, що потенційна енергія ланцюжка довжиною $\ell_3 = 1/3 \cdot \ell_1$, рівняється

$$E_{1/3} = -m_3gh_3 = -\frac{1}{9}m_1gh_1 = \frac{1}{9}E_1.$$

Повна потенційна енергія ланцюжка, зображеного на малюнку 1а, буде рівнятися $E_a = E_1$, зображеного на малюнку 1б – $E_b = E_{1/3} + E_{2/3} = \frac{5}{9} \cdot E_1$, а на малюнку 1в – $E_v = 3 \cdot E_{1/3} = \frac{3}{9} \cdot E_1$

Робота, яку ми виконуємо з підйому центру мас у першому випадку, рівняється $A_1 = E_b - E_a = \frac{4}{9} \cdot |E_1|$, а в другому – $A_2 = E_v - E_b = \frac{2}{9} \cdot |E_1|$. Звідси відповідь – $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1 = 6 \text{ Дж}$.

Відповідь: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1 = 6 \text{ Дж}$.