

1. Зображення точкового джерела світла одержано в точці А (рис. 1) за допомогою тонкої лінзи. Якщо замінити цю лінзу іншою і розташувати її у тому самому місці, можна отримати зображення цього джерела в точці В. Якщо після цього першу лінзу поставити впритул до другої, то зображення переміститься в точку С. Визначте побудовою положення джерела світла.

2. Магнітне поле, лінії якого паралельні і горизонтальні, обмежене згори горизонтальною площиною. З цієї площини відпускають маленьку заряджену кульку. Виявилось, що вона рухається вздовж кола радіуса R . Знайдіть залежність магнітної індукції B від координати y (позначення див. на рис. 2). Якими будуть максимальна швидкість і прискорення двох таких кульок, з'єднаних легкою нерозтяжною ниткою, якщо їх одночасно відпустити з висоти $h=6R$ над горизонтальною площиною? Вважати, що залежність $B(y)$ не змінюється для всіх точок магнітного поля. Опором повітря та розмірами кульок знехтувати.

3. З мосту над річкою горизонтально кидають кульку у напрямку проти течії. Початкова висота кульки над рівнем води 5 м, початкова швидкість 10 м/с. Побудуйте графік залежності модуля швидкості кульки від кута α між цією швидкістю та горизонтом. Знайдіть модуль швидкості кульки, коли швидкість направлено вертикально. Опором *повітря* знехтуйте. Вважайте, що швидкість річки усюди однакова і дорівнює 2 м/с. Густина матеріалу кульки дорівнює густині води, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

4. Численні дані свідчать, що Всесвіт починаючи з моменту його виникнення (Великий вибух) і по сьогодні розширюється. До відкриття темної енергії вважалось, що майбутня еволюція Всесвіту визначається сучасним значенням середньої густини матерії Всесвіту, в залежності від якого Всесвіт може або розширюватись вічно, або розширення колись припиниться, або ж воно колись зміниться стисненням. 1. Вважаючи, що: (а) Всесвіт наближено можна розглядати як сферу змінного з часом t радіуса R , де $R \sim t^n$ ($0 < n < 1$), всередині і на поверхні якої знаходяться галактики; (б) швидкість кожної галактики наближено визначається законом Хаббла $V=HR$, де H – параметр Хаббла, сучасне значення якого дорівнює 15 км/с на 1 млн. світлових років (1 світловий рік – відстань, яку фотон проходить за 1 земний рік) на базі законів Ньютона знайти, при якому сучасному значенні середньої густини матерії ρ Всесвіту його радіус (1.1) залишиться сталим; (1.2) збільшуватиметься з часом; (1.3) зменшуватиметься з часом. 2. Вважаючи, що (а) сучасне значення середньої густини матерії збігається з так званим критичним значенням, при якому радіус Всесвіту не змінюється; (б) в одному грамі матерії міститься $6,02 \cdot 10^{23}$ ядерних частинок; знайти, скільки ядерних частинок в середньому утримується в даний момент в 1 см^3 Всесвіту. 3. Вважаючи, що параметр Хаббла зв'язаний з радіусом R співвідношенням $H=(1/R)(dR/dt)$, знайти (3.1) сучасний вік Всесвіту, вважаючи $n=2/3$; (3.2) вік Всесвіту, коли густина його маси дорівнювала $3 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$.

5. У вертикально розміщеній, відкритій з одного кінця в атмосферу трубці легенький теплонепроникний поршень відділяє водень від рідини, налитой поверх поршня (рис. 3). Водень повільно нагрівають, і поршень повільно переміщується. До моменту, коли поршень перемістився настільки, що вся рідина з трубки вилілася, водень одержав кількість теплоти $Q=100 \text{ Дж}$. Визначити об'єм водню в початковому стані, якщо відомо, що він удвічі більший, ніж об'єм рідини, який, у свою чергу, дорівнює об'єму атмосферного повітря в трубці. Атмосферний тиск $P_0=10^5 \text{ Па}$. Додатковий тиск, створений стовпом рідини, спочатку налитой в трубку, дорівнює $P_0/9$. Тертям поршня об трубку знехтувати.

Задачі запропонували С.У.Гончаренко (1,5), О.Ю.Орлянський (2-3), С.Й.Вільчинський (4).

1. Изображение точечного источника света получено в точке А (рис. 1) с помощью тонкой линзы. Заменяя эту линзу другой, но разместив ее на том же месте, получили изображение в точке В. После этого первую линзу вплотную придвинули ко второй, и изображение переместилось в точку С. Определить построением положение источника света.

2. Магнитное поле, линии которого параллельны и горизонтальны, ограничено сверху горизонтальной плоскостью. С этой плоскости отпускают маленький заряженный шарик. Оказалось, что он движется по окружности радиуса R . Найдите зависимость магнитной индукции B от координаты y (обозначения см. на рис. 2). Какими будут максимальная скорость и ускорение двух таких шариков, соединенных легкой нерастяжимой ниткой, если их одновременно отпустить с высоты $h=6R$ над горизонтальной плоскостью? Считать, что зависимость $B(y)$ неизменна во всех точках магнитного. Спротивлением воздуха и размерами шариков пренебречь.

3. С моста над речкой горизонтально бросают шарик в направлении против течения. Начальная высота шарика над уровнем воды 5 м, начальная скорость 10 м/с. Постройте график зависимости модуля скорости шарика от угла α между этой скоростью и горизонтом. Найдите скорость шарика, когда скорость направлена вертикально. Спротивлением *воздуха* пренебрегите. Считайте, что скорость речки всюду одинакова и равна 2 м/с. Плотность материала шарика равна плотности воды, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

4. Многочисленные данные свидетельствуют, что Вселенная начиная с момента ее возникновения (Большой взрыв) и по сегодня расширяется. До открытия темной энергии считалось, что будущая эволюция Вселенной определяется современным значением средней плотности материи Вселенной, в зависимости от которого Вселенная может либо расширяться вечно, либо расширение когда-нибудь прекратится, либо же оно когда-нибудь сменится сжатием. 1. Считая, что: (а) Вселенную приближенно можно рассматривать как сферу переменного со временем t радиуса R , где $R \sim t^n$ ($0 < n < 1$), внутри и на поверхности которой находятся галактики; (б) скорость каждой галактики приближенно определяется законом Хаббла $V=HR$, где H – параметр Хаббла, современное значение которого равно 15 км/с на 1 млн. световых лет (1 световой год – расстояние, которое фотон проходит за 1 земной год) на базе законов Ньютона найти, при каком современном значении средней плотности материи ρ Вселенной ее радиус (1.1) останется постоянным; (1.2) будет увеличиваться со временем; (1.3) будет уменьшаться со временем. 2. Считая, что (а) современное значение средней плотности материи совпадает с так называемым критическим значением, при котором радиус Вселенной не изменяется; (б) в одном грамме материи содержится $6,02 \cdot 10^{23}$ ядерных частиц; найти, сколько ядерных частиц в среднем содержится в данный момент в 1 см^3 Вселенной. 3. Считая, что параметр Хаббла связан с радиусом R соотношением $H=(1/R)(dR/dt)$, найти (3.1) современный возраст Вселенной, считая $n=2/3$; (3.2) возраст Вселенной, когда плотность ее массы равнялась $3 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$.

5. В вертикально расположенной, открытой с одного конца в атмосферу трубке легкий теплонепроницаемый поршень отделяет водород от жидкости, налитой поверх поршня (рис. 3). Водород медленно нагревают, и поршень медленно перемещается. К моменту, когда поршень переместился настолько, что вся жидкость из трубки вылилась, водород получил количество теплоты $Q=100 \text{ Дж}$. Определить объем водорода в начальном состоянии, если известно, что он вдвое больше, чем объем жидкости, который, в свою очередь, равен объему атмосферного воздуха в трубке. Атмосферное давление $P_0=10^5 \text{ Па}$. Дополнительное давление, созданное столбом жидкости, первоначально налитой в трубку, равно $P_0/9$. Трением поршня о трубку пренебречь.

Задачи предложили С.У.Гончаренко (1,5), О.Ю.Орлянський (2-3), С.И.Вильчинский (4).

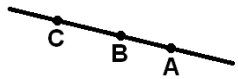


Рис. 1

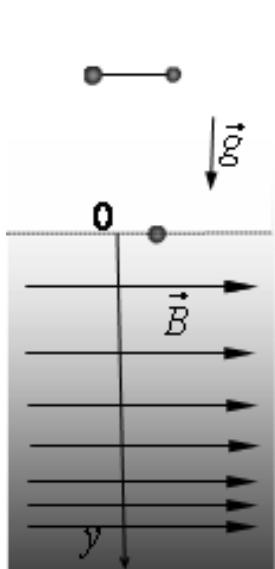


Рис. 2

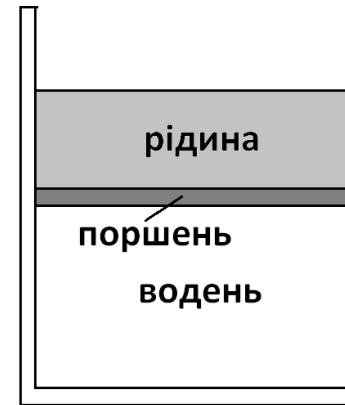


Рис. 3

Задача №5

9, 11 клас

Випадок I. Нехай центр лінзи знаходиться у певній точці на лінії, яка проходить через точки A , B , C . Взагалі можливі наступні розташування лінзи, джерела та його зображень (див. Рис. 1). Нехай промінь від джерела світла потрапляє у точку K першої лінзи. Після заломлення у ній промінь KA дає зображення A . Якщо розмістити щільно з цією лінзою другу, то за умовою задачі зображення джерела буде у точці C (промінь KC). Знайдемо побудовою фокальну площину другої лінзи. Скористаємось властивістю зворотності променів. Джерелом у цьому випадку буде світна точка A , а її зображення є точка C . Перетин променя KC з побічною оптичною віссю, яка паралельна до променя AK буде у фокальній площині другої лінзи (F_2). Проведемо симетричну фокальну площину ($-F_2$). Забираємо першу лінзу і отримаємо зображення джерела світла від другої лінзи в точці B . Знову використаємо правило зворотності ходу променів з точки B в точку K (промінь BK). Після заломлення він перетинається з побічною оптичною віссю у цій фокальній площині у точці E . Перетин променя EK до вісі ABC дає питоме положення джерела. Див. рисунки 1 і 2.

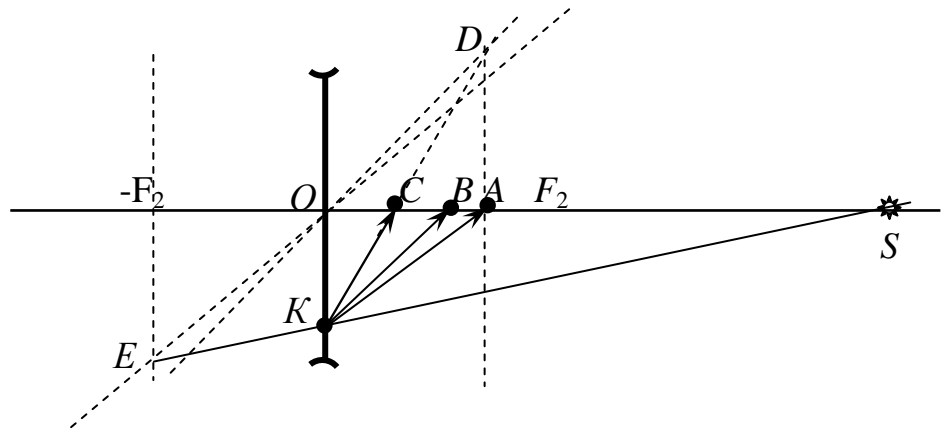
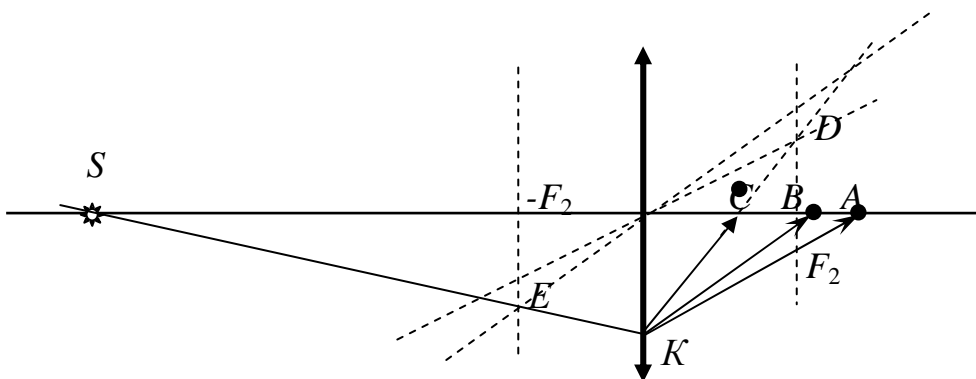


Рис. 1. Утворення зображень у випадку двох розсіювальних лінз.

Рис. 2 Демонструє випадок утворення дійсних зображень джерел світла.



Речь идет о задаче № 1 в 11 классе и задаче № 5 в 9 классе.

В приведенном решении (не знаю, авторском или жюри) все начинается с того, что мы где-то ставим линзу и от нее начинаем построения. Но положение линзы не задано! Надо бы еще доказать, что от перемещения линзы результат построения не изменится. Этот вопрос даже не обсуждается!

А доказать это просто невозможно: если не задать положение линзы, задача имеет бесчисленное множество решений (т.е. попросту не имеет смысла).

Рассмотрим даже упрощенную задачу: пусть заданная прямая совпадает с главной оптической осью, а про линзы известно, что они собирающие. Пусть S — источник, O — оптический центр линзы. Пусть точки расположены в порядке $S-O-C-B-A$. Обозначим $SO = d$, $OC = f$, $CB = a$, $BA = b$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{f+a+b} = D_1, \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{f+a} = D_2, \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_1 + D_2. \end{cases}$$

Исключая оптические силы, получаем одно уравнение с двумя неизвестными:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f+a+b} - \frac{1}{f+a}. \text{ Иначе: } d = \frac{f(f+a+b)(f+a)}{a(a+b) - f^2}.$$

Очевидно, изменяя f , мы получаем различные значения d , причем сумма этих величин никак не получается постоянной, т.е. функцией от a, b . Например, задав $f_0 = \sqrt{a(a+b)}$, мы получим $d \rightarrow \infty$ (т.е. при любом соотношении заданных отрезков годится бесконечно удаленный источник, дающий пучок параллельных лучей). От заданных значений a, b при этом зависят только оптические силы линз:

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)} + a + b}, \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)} + a}.$$

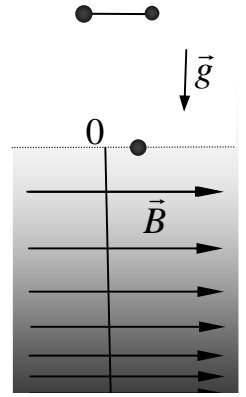
При изменении f от нуля до f_0 значение d изменяется от нуля до бесконечности...

Подойдем иначе. Пусть мы **хотим** поставить источник на расстоянии L перед точкой S . Получится ли это? Другими словами, найдется ли корень в промежутке $[0; L]$ у уравнения $\frac{1}{L-f} + \frac{1}{f+a+b} + \frac{1}{f+a} = \frac{1}{f}$? При $f \rightarrow 0$ правая часть стремится к бесконечности, а левая — конечна; при $f \rightarrow L$ получается как раз наоборот. Таким образом, корень существует при любом L и источник можно поставить где угодно!

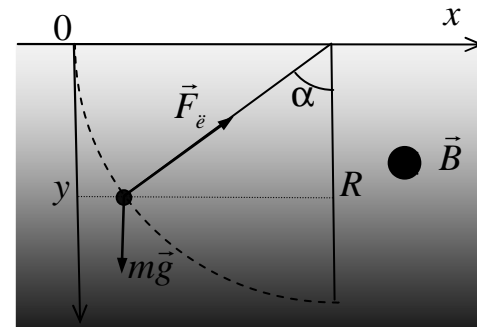
Задача кажется более чем странной. Неужели никто из детей этого не заметил? Или их рассуждения не оценили?

Задача № 2

Магнітне поле, лінії якого паралельні і горизонтальні, обмежене зверху горизонтальною площиною. З границі поля відпускають заряджену частинку. Виявилось, що вона рухається вздовж кола радіуса R . Знайдіть залежність магнітної індукції B від координати y (позначення див. на рис.). Якими будуть максимальна швидкість і прискорення двох таких частинок, з'єднаних легкою нерозтяжною ниткою, якщо їх одночасно відпустити з висоти $h = 6R$ над границею поля. Вважати, що залежність $B(y)$ виконується у магнітному полі на всіх висотах руху частинок. Опором повітря знехтувати.



Розв'язок. Сила кулонівського відштовхування між зарядженими частинками компенсується силою натягу нитки і, оскільки частинки відпускають одночасно з однакової висоти, нитка протягом руху буде горизонтальною і не вплине на синхронний рух частинок. Отже далі будемо розглядати рух однієї частинки. Для зручності візуалізації припустимо, що лінії магнітної індукції напрямлені від нас перпендикулярно до площини рисунку, а частинка має додатній заряд. Спроєкуємо другий закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_e + m\vec{g}$ на радіальний напрямок і скористаємось законом збереження енергії (сила Лоренца роботи не здійснює):



$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} = qvB - mg \cos \alpha, \\ \frac{mv^2}{2} = mgy. \end{cases}$$

Враховуючи, що $\cos \alpha = y/R$, виключаємо із системи кут і швидкість і знаходимо залежність магнітної індукції від координати:

$$B(y) = k\sqrt{y},$$

де $k = \frac{3m}{qR} \sqrt{\frac{g}{2}}$. Якщо тепер частинку відпустити з висоти h над границею поля, її рух у

магнітному полі вже не буде відбуватися по колу (у цьому можна переконатися з аналогічної системи рівнянь, припустивши, що рух все ж таки відбувається по колу іншого радіуса). Отже радіус кривизни траєкторії у першому рівнянні системи змінюється і тому замість цього рівняння використаємо проекцію другого закону Ньютона на горизонтальний напрямок осі абсцис, на який проекція сили тяжіння дорівнює нулю:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B(y) = kq \frac{dy}{dt} \sqrt{y}, \\ \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} = mg(y + h). \end{cases}$$

Перше рівняння системи після скорочення на dt легко інтегрується:

$$v_x - v_{0x} = \frac{2kq}{3m} y^{3/2},$$

де $v_{0x} = 0$ /ñ – горизонтальна швидкість входу частинки у зону поля ($y = 0$). Із другого рівняння системи (закону збереження енергії), по-перше, виходить, що максимальна

швидкість буде у найнижчій точці траєкторії, де максимального значення набуває координата y (отже $v_y = 0$), а, по-друге, що

$$v_y^2 = 2g(y+h) - v_x^2 = 2g(y+h) - \frac{2g}{R^2} y^3.$$

Максимальне y знайдемо, застосувавши умову $v_y = 0$ до останнього рівняння. Після введення безрозмірної координати $\xi = y/R$ і врахування $h = 6R$ отримуємо наступне кубічне рівняння:

$$\xi^3 - \xi - 6 = 0.$$

Рівняння має єдиний дійсний розв'язок $\xi = 2$. Отже $y = \xi R = 2R$. Тоді максимальна швидкість

$$v_{\max} = \sqrt{2g(y+h)} = 4\sqrt{gR}.$$

Щоб переконатися, що найбільше прискорення буде саме у цей момент часу проходження частинкою найнижчого положення, запишемо обидві проекції другого закону Ньютона на координатні осі:

$$\begin{cases} ma_x = qv_y B(y), \\ ma_y = -qv_x B(y) + mg \end{cases}$$

і запишемо квадрат прискорення:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \frac{q^2}{m^2} B^2(y) v^2 - 2 \frac{q}{m} v_x B(y) + g^2 = g^2 + 3 \frac{g^2}{R^2} (y^2 + 3hy).$$

Для додатних y маємо монотонно зростаючу функцію. Підставимо $h = 6R$, $y = 2R$ і отримаємо $a_{\max} = 11g$. З проекції другого закону Ньютона на вертикальну вісь

отримуємо теж саме $a_y = -\frac{q}{m} v_x B(y) + g = -11g$. Знак « \leftarrow » вказує не те, що прискорення

спрямоване вгору.

Заряджені частинки будуть рухатись поряд. Після пірнання у магнітне поле винирнуть і знову злетять вертикально вгору до висоти $h = 6R$ і так далі. Такі властивості земного магнітного поля – відбивати заряджені частинки, вже сотні мільйонів років служать земній біосфері. На цьому шляху лежать ідеї використання магнітів у прискорювачах і майбутніх термоядерних реакторах.

Задача № 3

З мосту над річкою горизонтально кидають кульку у напрямку проти течії. Початкова висота кульки над рівнем води 5 м, початкова швидкість 10 м/с. Побудуйте графік залежності модуля швидкості кульки від кута α між цією швидкістю та горизонтом. Знайдіть модуль швидкості кульки, коли швидкість напрямлено вертикально. Опором повітря знехтуйте. Вважайте, що швидкість річки усюди однакова і дорівнює 2 м/с. Густина матеріалу кульки дорівнює густині води, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Розв'язок. Оскільки опором повітря нехтуємо, рухатись вертикально вниз кулька буде вже під водою. Розглянемо спочатку перший етап руху кульки – рух у повітрі. Горизонтальна складова швидкості $v_x = v_0 = 10 \text{ м/с}$ не змінюється, вертикальна v_y (вісь ординат

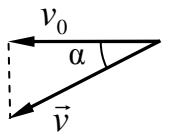
спрямуємо вниз) зростає. Швидкість $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ збільшується, утворюючи з горизонтом

кут α , який знаходимо із співвідношення $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v}$. Перед моментом

входження у воду кулька набула швидкості $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 10\sqrt{2} \text{ м/с}$, яку

можна знайти із закону збереження енергії. Кут з горизонтом у момент входження у воду $\alpha_1 = 45^\circ$. Отже, на першому етапі руху $\alpha \in [0; 45^\circ)$ графік залежності швидкості від кута задає вираз

$$v = \frac{v_0}{\cos\alpha}. \quad (1)$$



Далі тіло влітає у воду. Відзначимо, що за умовою задачі під водою сили тяжіння і Архімеда повністю компенсують одна одну. Перейдемо у систему відліку «вода» (швидкість течії позначимо \vec{u}). Відносно води швидкість кульки $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, її проекції $(v_x + u, v_y)$. Очевидно, сила опору води напрямлена протилежно \vec{w} . Тому прискорення кульки та зміна її швидкості за будь-який час напрямлені теж протилежно \vec{w} . Траєкторія руху кульки в системі відліку «вода» є прямолінійною. Отже, за малий проміжок часу

$$\frac{\Delta w_x}{w_x} = \frac{\Delta w_y}{w_y}.$$

Звідси випливає, що за будь-який проміжок часу проекції w_x, w_y

змінюються в однакову кількість разів: $v_x + u = k(v_0 + u)$, $v_y = kv_0$. Тут k поступово

зменшується від 1 до 0. Коли швидкість \vec{v} напрямлена вертикально, $k = \frac{u}{v_0 + u}$, при

$$\text{цьому } v_y = \frac{uv_0}{u + v_0} = \frac{5}{3} \text{ (м/с)}.$$

Для побудови графіка виразимо через кут α (врахувавши, що $\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x}$) коефіцієнт k і

модуль швидкості. Підставивши числові значення швидкостей у м/с, отримаємо

$$v = \frac{10}{6 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}.$$

Мінімальне значення швидкості відповідає максимальному значенню

виразу $f(\alpha) = 6 \sin \alpha - 5 \cos \alpha$, яке досягається при $\alpha_0 \approx 130^\circ$. Мінімальне значення

швидкості дорівнює 1,28 м/с. Ці результати можна отримати, наприклад, дослідивши

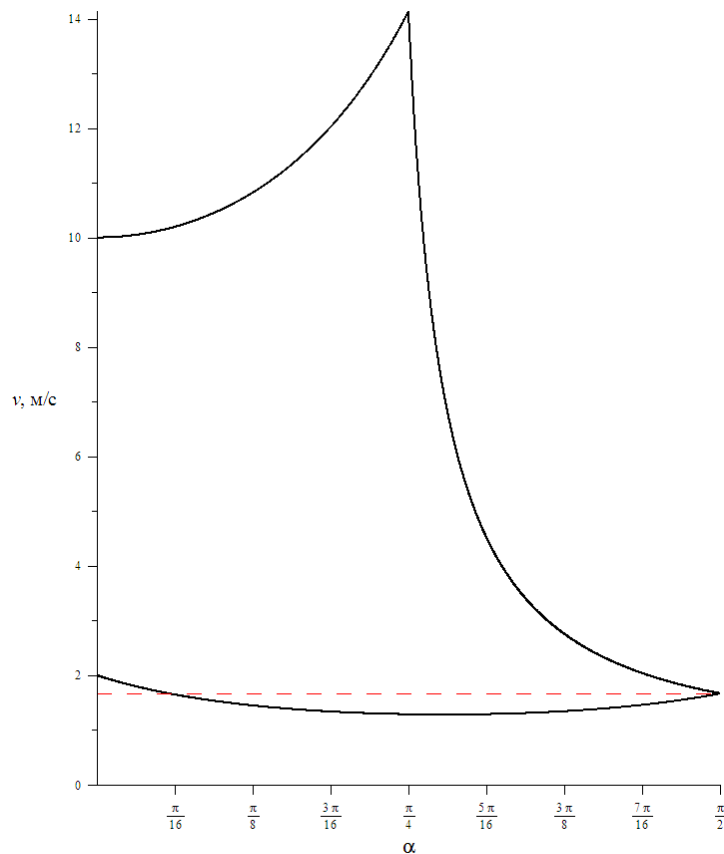
$f(\alpha)$ за допомогою похідної або перетворивши $f(\alpha)$ у форму $f(\alpha) = \sqrt{61} \cos(\alpha - 130^\circ)$.

Будуємо графік згідно формули $v = \frac{10}{\cos\alpha}$ для інтервалу $\alpha \in [0; 45^\circ)$ і згідно формули

$$v = \frac{10}{6 \sin \alpha - 5 \cos \alpha} \text{ для інтервалу } (45^\circ; 180^\circ),$$

потім праву частину другого графіку

дзеркально відбиваємо відносно $\alpha = 90^\circ$ (кут α на інтервалі $(90^\circ; 180^\circ)$ не може вважатися кутом між вектором швидкості та площиною горизонту).



Зазначимо, що графік $v(\alpha)$ може бути побудований, незважаючи на невідому залежність сили опору води від швидкості. Кожна точка на графіку відповідає конкретному значенню швидкості та куту, хоч ми й не можемо сказати (для руху у воді), в який саме момент часу це відбулося. Графік слід проходити за годинниковою стрілкою, починаючи зі швидкості 10 м/с.

Зазначимо також, що ми знехтували явищами, які відбувалися у процесі входу кульки у воду. І це не тільки можлива не горизонтальність поверхні за рахунок хвиль, але й те що сила опору протягом невеликого проміжку часу входження кульки у воду матиме напрямок дещо відмінний від протилежного до відносної швидкості кульки і води.

Розв'язок задачі № 4
11 клас

Розглянемо сферу радіуса R , всередині якої знаходяться галактики. Маса такої сфери дорівнює її об'єму, помноженому на шукану космічну густину маси ρ :

$$M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}. \quad (1)$$

Потенціальна енергія будь-якої типової галактики на поверхні даної сфери

$$E_p = -\frac{m MG}{R} = -\frac{4\pi m R^2 \rho G}{3}, \quad (2)$$

де m – маса галактики; G – гравітаційна стала, $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$. Швидкість даної галактики визначається законом Хаббла у вигляді

$$V = HR, \quad (3)$$

де H – параметр Хаббла. Відповідно, кінетична енергія галактики дорівнює

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m(H(t))^2(R(t))^2}{2}. \quad (4)$$

Повна енергія галактики є сумою кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = E_p + E_k = m(R(t))^2 \left(\frac{1}{2}(H(t))^2 - \frac{4}{3}\pi\rho(t)G \right). \quad (5)$$

Ця величина повинна залишатися сталою в процесі еволюції Всесвіту.

Якщо повна енергія E від'ємна, то галактика ніколи не зможе відлетіти на нескінченність, оскільки на дуже великих відстанях потенціальна енергія стає малою, і в такому випадку повна енергія дорівнює кінетичній, яка завжди додатня. Якщо ж повна енергія E додатня, галактика може досягнути нескінченності, маючи залишкову кінетичну енергію. Таким чином, умова того, що галактика ніколи не покине поверхню сфери, на якій знаходиться зараз, – це умова $E = 0$, що дає

$$\frac{1}{2}(H(t))^2 = \frac{4}{3}\pi\rho(t)G.$$

Таким чином, для того щоб радіус Всесвіту не змінювався з часом, густина повинна мати значення

$$\rho(t) = \frac{3(H(t))^2}{8\pi G}. \quad (6)$$

Враховуючи, що H дорівнює в даний момент значенню 15 км/с на мільйон світлових років, а світловий рік відповідає $9,46 \cdot 10^{12}$ кілометрів отримуємо що в даний момент густина матерії Всесвіту повинна бути рівною

$$\rho_{кр} = \frac{3}{8\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)} \left(\frac{15 \text{ км/с}}{10^6 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} \text{ км}} \right)^2 = 4,5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (7)$$

Це і є шукане сучасне значення критичної густини. Якщо значення густини у Всесвіті є більшим, ніж критичне, то розширення Всесвіту зміниться стисненням (радіус Всесвіту почне зменшуватись) і навпаки, якщо значення густини виявиться меншим, ніж критичне, то це буде означати, що Всесвіт буде розширбватись вічно. Зауважимо, що хоча даний результат отриманий із використанням принципів ньютонівської фізики, він насправді справедливий навіть тоді, коли вся матерія Всесвіту є ультрарелятивістською)

Якщо в одному грамі матерії міститься $6,02 \cdot 10^{23}$ ядерних частинок, то тоді для знайденого значення теперішньої критичної густини маємо приблизно $2,7 \cdot 10^{-6}$ ядерних частинок в 1 см^3 .

Характерний час розширення Всесвіту знаходимо, враховуючи що $H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$, і $R \sim t^n$, тобто час розширення (вік Всесвіту) є обернено пропорційним до значення параметру Хаббла в цей момент часу, тобто

$$t_{\text{розш}}(t) = \frac{n}{H(t)} = n \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho(t)G}}. \quad (8)$$

Тоді, використовуючи сучасне значення параметру Хаббла знаходимо нинішній вік Всесвіту

$$t_{\text{розш}} = 1,86 \cdot 10^{10} \text{ років}$$

В момент часу, коли густина маси Всесвіту дорівнювала 3 тисяч мільйонів грам на кубічний сантиметр, вік Всесвіту тоді дорівнював (при $n=2/3$)

$$t_{\text{розш}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi \cdot 3,8 \cdot 10^9 (\text{г/см}^3) \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)}} = 0,0147 \text{ с.}$$

Задача №5

11 клас

У вертикально розміщеній, відкритій з одного кінця в атмосферу трубці легенький теплонепроникний поршень відділяє водень від рідини, налитій поверх поршня (рис. 3). Водень повільно нагрівають, і поршень повільно переміщується. До моменту, коли поршень перемістився настільки, що вся рідина з трубки вилілася, водень одержав кількість теплоти $Q=100$ Дж. Визначити об'єм водню в початковому стані, якщо відомо, що він удвічі більший, ніж об'єм рідини, який, у свою чергу, дорівнює об'єму атмосферного повітря в трубці. Атмосферний тиск $P_0=10^5$ Па. Додатковий тиск, створений стовпом рідини, спочатку налитій в трубку, дорівнює $P_0/9$. Тертям поршня об трубку знехтувати.

Рис. 1

Розв'язок. Нехай початковий об'єм водню дорівнює V_0 . Графік залежності тиску P водню від його об'єму V показано на Рис. 2

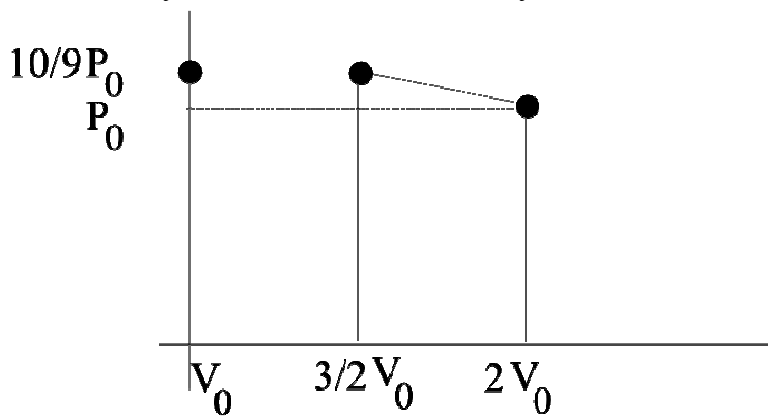


Рис. 2



Для всього процесу 1-2-3 за законом збереження енергії

$$Q = \nu C_V (T_3 - T_1) + A_{1-2-3}$$

тут ν - число молей газу, $C_V = 5/2R$, T_3, T_1 - температури газу в кінці і на початку

розширення, $A_{1-2-3} = \frac{13}{12} P_0 V_0$ - робота газу, яка дорівнює площі під графіком залежності

$P(V)$. Скориставшись рівнянням стану знаходимо

$$\nu R T_3 = 2 P_0 V_0, \quad \nu R T_1 = \frac{10}{9} P_0 V_0$$

З урахуванням записаних рівностей Q дорівнює

$$Q = \frac{119}{36} P_0 V_0$$

звідки $V_0 = \frac{39}{119} \frac{Q}{P_0} \approx 303 \text{ см}^3$.

Зауваження: Можна показати, що теплоту (при заданих в умові параметрах задачі) необхідно неперервно підводити під час всього процесу.