

1. Кульками, яким надають швидкість v_0 , намагаються влучити в такі самі нерухомі кульки. Виявилось, що кут між початковою швидкістю після зіткнення (кут розсіювання) не перевищує $\pi/3$. Кульки рухаються поступально. Зіткнення вважати однократними. 1. У скільки разів зменшується швидкість кульки, якщо кут розсіювання становить $\pi/3$? 2. Якою стає у цьому випадку швидкість тієї кульки, яка спочатку була нерухомою? 3. Яка частка механічної енергії при цьому переходить у внутрішню?

2. З дроту довжиною 12 м і опором 12 Ом зробили «глобус» так, що всі відрізки між найближчими парами з'єднань однакові (по чверть дуги кола на рис. 1). а) Визначте максимальний та мінімальний опір цього з'єднання при підключенні його до будь-яких діаметрально протилежних точок. б) Розгляньте випадок максимального опору, а електрони вважайте класичними частинками. До «глобусу» прикладено напругу 12 В. Визначте максимальний час, необхідний електронам, щоб пройти «глобусом». У кожному сантиметрі дроту знаходяться 10^{20} вільних електронів. Заряд електрона $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3. Прискорення вільного падіння на поверхні Венери складає 0,9 від земного, але тиск та температура значно більші (див. таблицю). На висоті 50-52 км тиск венеріанської атмосфери 0,1 МПа, а температура приблизно 30°C. Розрахуйте вантажопідйомність повітряного міста (у кг на 1 м^2 його площі), яке ззовні має вигляд диску діаметром декілька км і висотою 200 м. В такому місті живуть люди, дихаючи тим самим повітрям, що й на Землі за атмосферного тиску 0,1 МПа і температури 30°C. Плівка, з якої зроблена оболонка міста, має поверхневу густину 80 г/м². Уявіть тепер, що під час зовнішнього обслуговування людина у скафандрі зірвалась і почала падати. За рахунок сили опору повітря, яка пропорційна квадрату швидкості, густині атмосфери та площі перерізу, для тіла людини встановлюється деяка швидкість, яка у земних умовах поблизу поверхні дорівнює 50 м/с. Чи буде зіткнення людини з поверхнею Венери безпечним? Відносні атомні маси С, О і N відповідно дорівнюють 12, 16 і 14.

Планета	Тиск біля поверхні планети	Температура біля поверхні	Склад атмосфери
Венера	9,2 МПа	462°C	96,5% CO ₂ , 3,5% N ₂
Земля	0,1 МПа	15°C	78% N ₂ , 22% O ₂

4. На рисунку з Циклопедії (перша всесвітньовідома енциклопедія англійською, 1728 р.) показаний принцип утворення зображення у камері-обскури (рис. 2). Чи не припустився художник принципової помилки? Уявіть, що Ви фотографуєте камерою-обскурою невеликий предмет навпроти. Ви підбрали плоско-опуклі лінзи, які по черзі можна накласти (оптичним центром) на отвір камери. Перша лінза дає чітке зображення, а друга – настільки ж розмите, як і без лінзи. Вкажіть відношення оптичних сил цих лінз. Якщо лінзою, перекриваючи отвір С, довільним чином ковзати вздовж поверхні камери зі швидкістю v , з якою швидкістю і в якому напрямку буде рухатись зображення на задній стінці камери?

5. На рис. 3 зображений шарнірний механізм, який називається «Нюрнберзькі ножиці». Точка F починає рухатися зі сталою швидкістю $V_0 = 2 \text{ м/с}$. Знайти прискорення в точках А, В, С, D, E, у той момент, коли кут α дорівнює 30°, якщо довжина важеля OA дорівнює 1 м.

Задачі запропонували Ю.П.Мінаєв (1), О.Ю.Орлянський (2-4), Є.П.Соколов (5).

1. Шариками, которым придают скорость v_0 , пытаются попасть в такие же, но неподвижные шарики. Оказалось, что угол между начальной скоростью и скоростью после столкновения (угол рассеяния) не превышает $\pi/3$. Шарики движутся поступательно. 1. Во сколько раз уменьшается скорость шарика, если угол рассеяния составляет $\pi/3$? 2. Какой становится в этом случае скорость того шарика, который сначала был неподвижен? 3. Какая доля механической энергии при этом переходит во внутреннюю?

2. Из проволоки длиной 12 м и сопротивлением 12 Ом изготовили «глобус» так, что все отрезки между ближайшими парами соединений одинаковы (по четверти дуги окружности на рис. 1). а) Определите максимальное и минимальное сопротивление этого соединения при подключении его к любым диаметрально противоположным точкам. б) Рассмотрите случай максимального сопротивления, а электроны считайте классическими частицами. К «глобусу» приложено напряжение 12 В. Определите максимальное время, необходимое электронам, чтобы пройти по «глобусу». В каждом сантиметре проволоки находятся 10^{20} свободных электронов. Заряд электрона $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3. Ускорение свободного падения на поверхности Венеры составляет 0,9 от земного, но давление и температура значительно больше (см. таблицу). На высоте 50-52 км давление венерианской атмосферы 0,1 МПа, а температура приблизительно 30°C. Рассчитайте грузоподъемность воздушного города (в кг на 1 м^2 его площади), внешне имеющего вид диска диаметром несколько км и высотой 200 м. В таком городе живут люди, дыша тем же воздухом, что и на Земле при атмосферном давлении 0,1 МПа и температуре 30°C. Пленка, из которой сделана оболочка города, имеет поверхностную плотность 80 г/м². Представьте теперь, что во время внешнего обслуживания человек в скафандре сорвался и начал падать. За счет силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости, плотности атмосферы и площади сечения, для тела человека устанавливается некоторая скорость, которая в земных условиях вблизи поверхности равна 50 м/с. Будет ли столкновение человека с поверхностью Венеры безопасным? Относительные атомные массы С, О и N соответственно равны 12, 16 и 14.

Планета	Давление возле поверхности	Температура возле поверхности	Состав атмосферы
Венера	9,2 МПа	462°C	96,5% CO ₂ , 3,5% N ₂
Земля	0,1 МПа	15°C	78% N ₂ , 22% O ₂

4. На рисунке из Циклопедии (первая всемирно известная энциклопедия на английском, 1728 р.) показан принцип создания изображения в камере-обскуре (рис.2). Не допустил ли художник принципиальной ошибки? Представьте, что Вы фотографируете камерой-обскурой небольшой предмет напротив. Вы подобрали плоско-выпуклые линзы, которые по очереди можно накладывать (оптическим центром) на отверстие камеры. Первая линза дает четкое изображение, а вторая – настолько же размытое, как и без линзы. Укажите отношение оптических сил этих линз. Если линзой, перекрывая отверстие С, произвольным образом скользить вдоль поверхности камеры со скоростью v , с какой скоростью и в каком направлении будет двигаться изображение на задней стенке камеры?

5. На рис. 3 изображен шарнирный механизм, который называется «Нюрнбергские ножицы». Точка F начинает двигаться с постоянной скоростью $V_0 = 2 \text{ м/с}$. Найти ускорения точек А, В, С, D, E, в тот момент, когда угол α равен 30°, если длина рычага OA равна 1 м.

Задачи предложили Ю.П.Минаев (1), О.Ю.Орлянський (2-4), Є.П.Соколов (5).

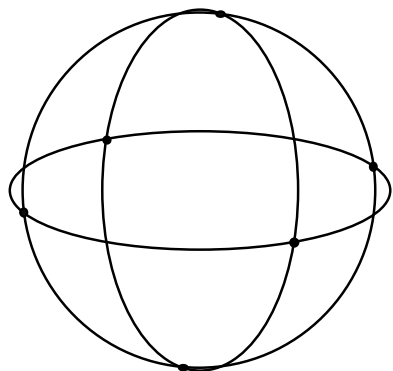


Рис.1

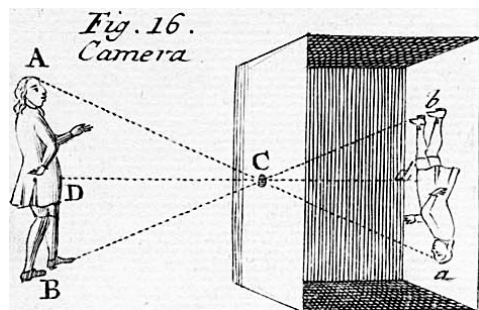


Рис.2

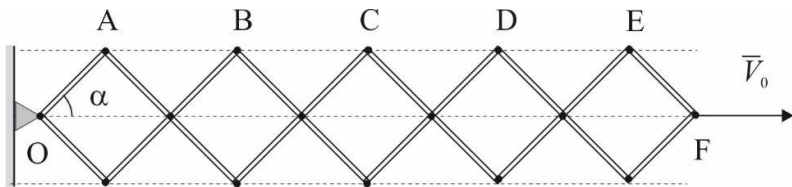


Рис.3

10 клас

Задача 10.1. В системі центра мас імпульси кульок до зіткнення рівні за величиною і протилежні за напрямком. Після зіткнення вони також рівні за величиною (але ця величина зменшується) і протилежні за напрямком, але цей напрямок може бути різним.

Відповіді: $v_1 = \frac{v_0}{4}$, $v_2 = \frac{v_0\sqrt{13}}{4}$.

Доля втраченої енергії дорівнює $\frac{\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{1}{8}$.

Задача 10.2.

«Глобус» складається з трьох дротових кіл, площини яких перпендикулярні. Довжина кожної чверті кола дорівнює 1 м, а опір 1 Ом. Опір між двома протилежними точками з'єднань дротів легко знайти, оскільки струм через перпендикулярне до осі симетрії коло не йтиме: $R_1 = 0,5$ Ом. Також легко знайти опір для іншого симетричного з'єднання, коли напруга подається до точок, що знаходяться посередині чвертей кола: $R_2 = 0,75$ Ом.

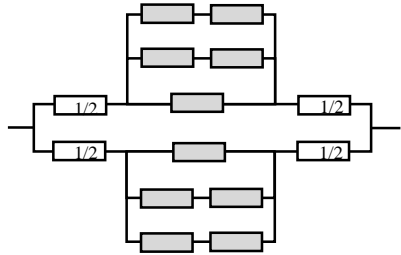
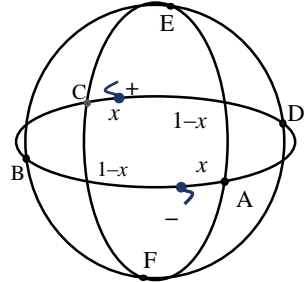
Це і будуть (з міркувань симетрії) мінімальний і максимальний опори.

Максимальний опір $R_2 = 3/4$ Ом буде при подачі напруги до середин чвертей дуг кола АВ і CD. У цьому випадку еквівалентна схема має вигляд, зображений на другому рисунку (затоновані резистори мають опір по 1 Ом). Якщо на з'єднання подати напругу 12 В, загальний струми через резистори по 1/2 Ом будуть по 8 А, через центральні резистори по 1 Ом – по 4 А, а через інші – по 2 А. Знайдемо швидкість руху електронів у дроті.

За визначенням сила струму $I = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t} = \frac{Ne}{l/v} = \frac{N}{l}ev = nev$, де $n = N/l = 10^{20}$ см⁻¹,

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Отже, швидкість руху електронів $v = I/(ne)$.

Навіть при струмі 8 А вона дорівнює всього 0,5 см/с. При струмі 4 А – 1/4 см/с, а 2 А – 1/8 см/с. Отже, електронам, які підуть центральними прямими (див. мал.) ділянками, знадобиться 100 с+400 с+100 с = 10 хвилин, а електронам, які після розгалуження підуть довгими шляхами: 100 с+1600 с+100 с = 30 хвилин.



Задача 10.3.

Для венеріанської атмосфери молярна маса повітря

$$M_B = \frac{m}{v_{CO_2} + v_{N_2}} = \frac{m}{\frac{0,965m}{44} + \frac{0,035m}{28}} \approx 43,5 \frac{\Gamma}{\text{моль}}, \text{ а для земної}$$

$$M_3 = \frac{m}{v_{N_2} + v_{O_2}} = \frac{m}{\frac{0,78m}{28} + \frac{0,22m}{32}} \approx 28,9 \frac{\Gamma}{\text{моль}}.$$

1% земної атмосфери складають аргон, вуглекислий газ (більш важкі, ніж кисень) та водяні пари (більш легкі, ніж кисень), тому з незначною похибкою ми віднесли цей відсоток до кисню.

Як бачимо ($M_3 < M_B$), кулю із земним складом повітря виштовхуватиме більш щільне повітря Венери. Розрахуємо різницю сили Архімеда і ваги повітря всередині кулі. Для цього густину повітря виразимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона.

$$(\rho_B - \rho_3) g_B V = (M_B - M_3) \frac{P_1 \pi r^2 h}{RT_1} g_B$$

Ця сила має утримувати оболонку $\sigma S = \sigma(2\pi r^2 + 2\pi r h) = 2\pi r^2(1 + h/r)\sigma$ і корисне навантаження всередині. За умовою діаметр міста декілька кілометрів, отже h/r щонайменше у 10 разів менше за одиницю. Отже з прийнятною точністю для порівняно невисоких великих дисків масою бокової смужки оболонки можна знехтувати. Тоді маса оболонки $\sigma S \approx 2\pi r^2 \sigma$, а маса корисного навантаження у розрахунку на квадратний метр $(M_B - M_3) \frac{Ph}{RT} - 2\sigma \approx 112 \text{ кг/м}^2 \approx 10^2 \text{ кг/м}^2$.

У розрахунках вважали, що на Землі прискорення вільного падіння $9,8 \text{ м/с}^2$. Як бачимо, масою оболонки взагалі можна знехтувати, оскільки значно менше, ніж 100 кг/м^2 .

Знайдемо швидкість людини поблизу поверхні планети. Спочатку людина буде падати наче на Землі, розженеться до якоїсь максимальної швидкості, після чого почне гальмувати за рахунок збільшення густини атмосфери. Сила опору за умовою пропорційна до квадрату швидкості, густині атмосфери і площі перерізу.

Під час руху швидкість, що встановлюється, знаходиться з рівності сил. Отже,

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k\rho S}}. \text{ Поділимо аналогічні вираз для Венери і Землі, щоб позбутися невідомих.}$$

$$\frac{v_B}{v_3} = \sqrt{\frac{g_B \rho_{3_2}}{g_3 \rho_{B_2}}} = \sqrt{0,9 \frac{M_3 P_{3_2} T_{B_2}}{M_B P_{B_2} T_{3_2}}} \approx 0,129.$$

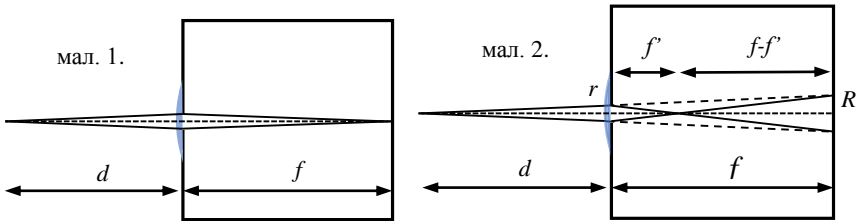
Швидкість перед приземленням на Венері буде $6,5 \text{ м/с}$. З такою швидкістю приземляються, коли стрибають з висоти $h = \frac{v^2}{2g} \approx 2,1 \text{ м}$, що можна вважати безпечним для

підготовленої людини.

Задача 10.4.

1 (1 бал). Художник припустився помилки. У вертикальному напрямку зображення перевернута, а в горизонтальному — ні. Праву та ліву руки зображення слід поміняти місцями.

2 (1 бал). Щоб відповісти на друге питання, введемо позначення (мал. 1). Тоді оптична сила першої лінзи $D_1 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$.



3 (1 бал). Друга лінза може давати таке ж за площею розмиття, якщо матиме більшу оптичну силу (мал. 2) $D_2 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f'}$.

З подібності трикутників $\frac{R}{r} = \frac{d+f}{d} = \frac{f-f'}{f}$, звідки $\frac{1}{f'} = \frac{1}{d} + \frac{2}{f}$

$$\text{і } D_2 = 2\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right) = 2D_1.$$

Отже, відношення оптичних сил лінз дорівнює 2.

4 (2 бали). Якщо лінзу рухати вздовж передньої стінки камери, промінь, що проходить крізь отвір, по різному заломлюватиметься в залежності від його відстані до оптичного центру. Але, щоб зрозуміти, де буде зображення, не потрібні складні розрахунки. Так у випадку першої лінзи зображення завжди буде на лінії «предмет – оптичний центр лінзи». Отже, модуль швидкості руху зображення буде

$u_1 = \frac{d+f}{d} = \left(1 + \frac{f}{d}\right)v$ і ніяк не залежатиме від того, де саме знаходиться оптичний центр лінзи. Напрямок руху зображення буде співпадати з напрямком руху оптичного центру лінзи.

Аналогічно для другої лінзи «чітке зображення» рухатиметься зі швидкістю $u'_2 = \left(1 + \frac{f'}{d}\right)v$, а розмите зображення на стінці — $u_2 = \frac{f}{f'}u'_2$, звідки з урахуванням отриманого раніше й знаходимо, що $u_2 = 2u_1$.

Задача 10.5.

а). Позначимо деякі точки: A_1, K, B_1 . Швидкості цих точок:

$$v_K = v_0/5; \quad v_{A_1} = v_0/10;$$

$$v_{B_1} = 3v_0/10. \quad \text{Оскільки,}$$

A_1 завжди знаходиться під A , B_1 завжди знаходиться під B , то горизонтальна складова швидкості всіх точок не змінюється, а отже горизонтальна складова прискорення відсутня.

б) Всі точки знаходяться на однаковій висоті, тому вертикальна складова швидкості для точок A, B, C, D, E однакова, а отже однакові прискорення. **ПРИСКОРЕННЯ ВСІХ ТОЧОК ОДНАКОВІ І НАПРЯМЛЕНІ ВЕРТИКАЛЬНО ВНИЗ!**

в) Найзручніше вибрати найпростіший випадок, рух точки A

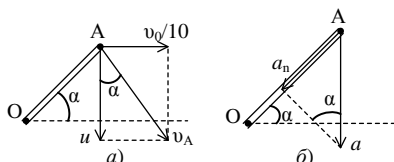
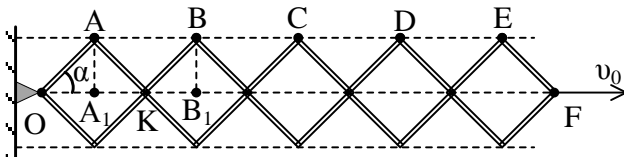
рівна $v_A = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{v_0}{10}$ і напрямлена перпендикулярно до відрізка OA (мал. 1а)

Оскільки точка A рухається по частині кола радіусом OA тому має нормальну складову прискорення $a_n = v_A^2 / \ell$.

г) Накреслимо доцентрову складову прискорення точки A і повну складову прискорення точки A (мал. 1б).

З рисунка видно, що $a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin^3 \alpha} \cdot \frac{v_0^2}{100 \cdot \ell} = 0,32 \text{ м/с}^2$

$$a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin^3 \alpha} \cdot \frac{v_0^2}{100 \cdot \ell} = 0,32 \text{ м/с}^2.$$



Мал. 1