

1. Ядро атома дейтерію (ізоотопу водню) складається з протона та нейтрона. В моделі, побудованій на основі механіки Ньютона та електростатики, це ядро розглядають як систему з двох частинок маси m_1 та m_2 , які з'єднані між собою еластичним шнуром змінної довжини. Вважається, що частинка маси m_1 має електричний заряд $q>0$, а частинка маси m_2 електронейтральна і що в деякий момент часу в такій системі вмикається електростатичне поле, потенціал якого $\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\lambda x}$. Під дією цього поля заряджена частинка починає рухатися з прискоренням. При цьому на неї починає також діяти сила опору з боку шнура, яку можна змодельовати за допомогою співвідношення $F_{\text{оп}} = -\gamma(t)v_1(t)$, де $v_1(t)$ – швидкість частинки, $\gamma(t) = A\sqrt{E(t)}$, $E(t)$ – повна енергія зарядженої частинки після включення електричного поля. 1) Знайдіть розмірність констант λ і A . 2) На основі законів Ньютона та електростатики обґрунтуйте і запишіть рівняння руху зарядженої і незарядженої частинки. 3) Знайдіть, як будуть залежати від часу координати $x_1(t)$ та $x_2(t)$ частинок після включення електричного поля (вважати, що до включення електричного поля система рухається прямолінійно з постійною швидкістю v_0 , направленою вздовж шнура у додатному напрямку осі Ox , а довжина шнура є сталою і дорівнює l_0 , а також що завжди справедливо $0 < m_1 \lambda^2 / 2A^2 < 1$). 4) Знайдіть момент часу t_0 , коли в системі вмикається електричне поле. 5) При перевищенні довжини $2l_0$ або при скороченні її до 0 шнур розривається і частинки рухаються незалежно (ядро дейтерію розпалося). З'ясуйте, чи реалізується якась із цих ситуацій і якщо так, то доведіть це. *Підказка: залежність від часу координати зарядженої частинки шукайте у вигляді $x_1(t) = \ln[Bt^\beta]/\lambda$, де B і β – невідомі параметри.*
2. Визначте, якою мінімально може бути температура T у циліндрі поршневого двигуна водного скутера із водометом, к.к.д. якого η , якщо скутер рухається зі сталою швидкістю, вода втікає у водомет зі швидкістю руху скутера, а температура вихлопних газів T_0 . Площа перерізу вхідного отвору труби водомету - S_1 , а вихідного - S_2 .
3. На шляху променів від віддаленого джерела світла поставили увігнуто-опуклу лінзу. У променях, відбитих від увігнутої поверхні лінзи, отримали дійсне зображення джерела на відстані $a=5$ см. Знайдіть радіус кривини увігнутої поверхні лінзи. Перевернувши лінзу, у відбитих променях, на подив, також отримали дійсне зображення джерела, але на відстані $b=6$ см. Знайдіть оптичну силу лінзи. Приймаючи коефіцієнт заломлення речовини лінзи $n=1.5$, визначіть радіус опуклої поверхні лінзи.
4. У лісі, оточеному непроникиним парканом, живе N_1 зайців та N_2 лисиць. Зайці їдять траву, її кількість вважається достатньою для годівлі всіх зайців. За відсутності лисиць швидкість зростання кількості зайців $dN_1/dt = K_1 N_1$, $K_1 > 0$. Лисиці харчуються тільки зайцями. За відсутності зайців кількість лисиць спадає у відповідності до рівняння $dN_2/dt = -K_2 N_2$, $K_2 > 0$. Зустрічі лисиць і зайців мають наслідком зменшення кількості зайців і збільшення кількості лисиць. Вважати, що ймовірність зустрічі зайця й лисиці пропорційна добутку $N_1 \cdot N_2$ (відповідні коефіцієнти пропорційності введіть самостійно). 1) Знайдіть рівноважні кількості зайців N_{10} та лисиць N_{20} . 2) Вважаючи, що $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ та $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, причому $|n_{1,2}(t)| \ll N_{10,20}$, знайдіть частоту коливань величин n_1 та n_2 . 3) Який зсув фаз між коливаннями кількості зайців та лисиць та яке відношення амплітуд цих коливань?
5. Довгий плазмовий циліндр із концентрацією електронів n і температурою T вміщений у поздовжнє магнітне поле з індукцією B . 1) Знайдіть густину поверхневого струму циліндра й поясніть механізм його виникнення. 2) Знайдіть тиск, зумовлений силою Ампера, що виникає при взаємодії цього струму із зовнішнім магнітним полем. 3) Наскільки зменшиться індукція магнітного поля всередині плазмового циліндра? Іони плазми вважати нерухомими. Вважати, що в плазмі $\mu = 1$.

Задачі запропонували С.Й.Вільчинський (1), В.П.Сохацький (2-3), І.О.Анісімов (4-5).

1. Ядро атома дейтерія (ізоотопу водорода) состоит из протона и нейтрона. В модели, построенной на основе механики Ньютона и электростатики, это ядро рассматривают как систему из двух частиц массой m_1 и m_2 , соединенных эластичным шнуром переменной длины. Считается, что частица массы m_1 имеет электрический заряд $q>0$, а частица массы m_2 электронейтральна и что в некоторый момент времени в такой системе включается электростатическое поле, потенциал которого $\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\lambda x}$. Под действием этого поля заряженная частица начинает двигаться с ускорением. При этом на нее начинает также действовать сила сопротивления со стороны шнура, которую можно смоделировать с помощью соотношения $F_{\text{оп}} = -\gamma(t)v_1(t)$, где $v_1(t)$ – скорость частицы, $\gamma(t) = A\sqrt{E(t)}$, $E(t)$ – полная энергия заряженной частицы после включения электрического поля. 1) Найдите размерность констант λ и A . 2) На основе законов Ньютона и электростатики обоснуйте и запишите уравнение движения заряженной и незаряженной частиц. 3) Найдите, как будут зависеть от времени координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ частиц после включения электрического поля (считать, что до включения электрического поля система движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0 , направленной вдоль шнура в положительном направлении оси Ox , а длина шнура постоянна и равна l_0 , а также что всегда справедливо $0 < m_1 \lambda^2 / 2A^2 < 1$). 4) Найдите момент времени t_0 , когда в системе включается электрическое поле. 5) При превышении длины $2l_0$ или при сокращении ее до 0 шнур разрывается и частицы движутся независимо (ядро дейтерия распалось). Выясните, реализуется ли какая-нибудь из этих ситуаций и если да, то докажете это. *Подсказка: зависимость времени координаты заряженной частицы ищите в виде $x_1(t) = \ln[Bt^\beta]/\lambda$, где B и β – неизвестные параметры.*
2. Определите, какой минимально может быть температура T в цилиндре поршневого двигателя водного скутера с водометом, к.п.д. которого η , если скутер движется с постоянной скоростью, вода втекает в водомет со скоростью движения скутера, а температура выхлопных газов T_0 . Площадь сечения входного отверстия водозаборной трубы - S_1 , а выходного - S_2 .
3. На пути лучей от удаленного источника света поставили вогнуто-выпуклую линзу. В лучах, отраженных от вогнутой поверхности линзы, получили действительное изображение источника на расстоянии $a=5$ см. Найдите радиус кривизны вогнутой поверхности линзы. Перевернув линзу, в отраженных лучах, на удивление, тоже получили действительное изображение источника, но на расстоянии $b=6$ см. Найдите оптическую силу линзы. Принимая коэффициент преломления вещества линзы $n=1.5$, определите радиус выпуклой поверхности линзы.
4. В лесу, окруженному непроницаемым забором, живет N_1 зайцев и N_2 лисиц. Зайцы едят траву, ее количество считается достаточным для питания всех зайцев. При отсутствии лисиц скорость возрастания количества зайцев $dN_1/dt = K_1 N_1$, $K_1 > 0$. Лисицы питаются только зайцами. При отсутствии зайцев количество лисиц падает в соответствии с уравнением $dN_2/dt = -K_2 N_2$, $K_2 > 0$. Встречи лисиц и зайцев имеют следствием уменьшение количества зайцев и увеличение количества лисиц. Считать вероятность встречи зайца и лисицы пропорциональной произведению $N_1 \cdot N_2$ (соответствующие коэффициенты пропорциональности введите самостоятельно). 1) Найдите равновесное количество зайцев N_{10} и лисиц N_{20} . 2) Считая, что $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ и $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, причем $|n_{1,2}(t)| \ll N_{10,20}$, найдите частоту колебаний величин n_1 и n_2 . 3) Каков сдвиг фаз между колебаниями количества зайцев и лисиц и каково отношение амплитуд этих колебаний?
5. Длинный плазменный цилиндр с концентрацией электронов n и температурой T помещен в продольное магнитное поле с индукцией B . 1) Найдите плотность поверхностного тока цилиндра и объясните механизм его возникновения. 2) Найдите давление, обусловленное силой Ампера, которая возникает при взаимодействии этого тока с внешним магнитным полем. 3) Насколько уменьшится индукция магнитного поля внутри плазменного цилиндра? Ионы плазмы считать неподвижными. Считать, что в плазме $\mu = 1$.

Задачи предложили С.И.Вильчинский (1), В.П.Сохацкий (2-3), И.А.Анисимов (4-5).

11 клас

Задача 11.1.

- 1) Константа A має розмірність $[A] = \text{кг}^{1/2} \cdot \text{м}^{-1}$, а константа $\lambda - [\lambda] = \text{м}^{-1}$.
 2) Другий закон Ньютона для першої частинки має вигляд:

$$m_1 a_1 = -\gamma(t) v_1 - q \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x_1} \quad (1)$$

Відповідно до третього закону Ньютона, рівняння руху другої частинки матиме вигляд: $m_2 a_2 = \gamma(t) v_1(t)$ (2)

3) Підставляючи до рівняння руху зарядженої частинки явний вираз для коефіцієнта опору і враховуючи, що $v = \dot{x}$, $a = \ddot{x}$, отримуємо наступне рівняння:

$$\ddot{x}_1 + \frac{A}{m_1} \sqrt{\frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + q\varphi_0} e^{-\lambda x_1} \dot{x}_1 = (q / m_1) \lambda \varphi_0 e^{-\lambda x_1} \quad (3)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння руху у вигляді $x_1(t) = \frac{1}{\lambda} \ln[Bt^\beta]$. Тоді $\dot{x}_1(t) = \frac{\beta}{\lambda t}$,

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{\beta}{\lambda t^2}, \quad e^{-\lambda x_1} = \frac{1}{Bt^\beta}. \quad \text{Підставимо все це до рівняння та виконаємо спрощення:}$$

$$-\frac{\beta}{\lambda t^2} + \frac{A}{m_1} \frac{\beta}{\lambda t} \sqrt{\frac{m_1 \beta^2}{2\lambda^2 t^2} + \frac{q\varphi_0}{Bt^\beta}} = \frac{q\lambda\varphi_0}{m_1 B t^\beta} \quad (4)$$

Звідси очевидним чином $\beta = 2$, а величину B знайдемо зі співвідношення:

$$-1 + \frac{A\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{m_1}} \sqrt{1 + \frac{q\varphi_0\lambda^2}{2m_1 B}} = \frac{q\varphi_0\lambda^2}{2m_1 B}, \Rightarrow B = \frac{A^2 q\varphi_0}{m_1^2} \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{m_1 \lambda^2}{2A^2} < 1 \quad (5)$$

Знайдемо тепер, як залежить від часу коефіцієнт опору:

$$\gamma(t) = A \sqrt{\frac{m_1}{2} \frac{4}{\lambda^2 t^2} + \frac{q\varphi_0}{Bt^2}} = \frac{m_1}{\varepsilon t}. \quad (6)$$

Враховуючи, що $v_1(t) = \frac{2}{\lambda t}$, рівняння руху другої частинки набуде вигляду:

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1}{m_2} \frac{2}{\varepsilon \lambda t^2} \quad (7)$$

Інтегруючи двічі по часу, знайдемо швидкість та координату другої частинки:

$$v_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} \frac{2}{\varepsilon \lambda t} + C_1, \quad x_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} \frac{2}{\varepsilon \lambda} \ln \frac{t}{t_0} + C_1 t + C_2 \quad (8)$$

де невідомі константи $C_{1,2}$ можна знайти з початкових умов:

$$v_2(t_0) = v_0; \quad x_2(t_0) = x_1(t_0) - l_0 \quad (9) \quad \text{Звідси}$$

$$C_1 = v_0 \left(1 + \frac{m_1}{m_2 \varepsilon} \right); \quad C_2 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{4B}{\lambda^2 v_0^2} - l_0 - \frac{2}{\lambda} \left(1 + \frac{m_1}{m_2 \varepsilon} \right) \quad (10)$$

4) Оскільки координата першої частинки змінюється з часом як $x_1(t) = \frac{1}{\lambda} \ln[Bt^2]$, то

її швидкість має вигляд $v_1(t) = \frac{2}{\lambda t}$. Враховуючи, що в початковий момент часу

$$v_1 = v_0, \text{ отримаємо момент включення електричного поля: } t_0 = \frac{2}{\lambda v_0} \quad (11)$$

$$5) \text{ Довжина шнура } l(t) = x_1(t) - x_2(t) = l_0 + \frac{2}{\lambda} \left(1 + \frac{m_1}{m_2 \varepsilon} \right) \left[\ln \frac{t}{t_0} - \frac{t}{t_0} + 1 \right] \quad (12)$$

Неважко впевнитися, що це є спадна функція часу. Тому у певний момент часу друга частинка наздожене першу і зв'язок між ними зникне. Час, коли це відбудеться, ви-

значається з трансцендентного рівняння $\frac{\lambda l_0}{2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2 \varepsilon} \right)^{-1} = y - 1 - \ln y$, $y = t/t_0$.

Задача 11.2.

Позначимо v – швидкість скутера відносно води, u – швидкість викиду води відносно скутера, $\mu = \Delta m / \Delta t$ – маса води, що проходить через водомет за одиницю часу. Очевидно, що $u > v$ (тобто вода прискорюється), тому потужність двигуна P

витрачається на створення сили тяги: $F = \Delta m \cdot \frac{u - v}{\Delta t} = \mu \cdot (u - v)$, отже:

$P = Fv = \mu \cdot (u - v)v$. Цю потужність вважатимемо корисною потужністю водомета, в той час як за його повну потужність приймемо зміну кінетичної енергії води, що проходить за одиницю часу: $P_{\text{вигр}} = \mu \cdot (u^2 - v^2) / 2$.

Тоді к.к.д. водомету: $\eta_{\text{вдмт}} = P / P_{\text{вигр}} = 2v / (u + v)$, а з врахуванням неперервності потоку води $v \cdot S_1 = u \cdot S_2$, що проходить крізь водомет: $\eta_{\text{вдмт}} = 2S_2 / (S_1 + S_2)$.

Мінімально можливу температуру в циліндрі можна оцінити з припущення про роботу двигуна в режимі цикла Карно, в цьому випадку к.к.д.: $\eta_{\text{крн}} = (T - T_0) / T$, а загальний к.к.д. всієї системи $\eta = \eta_{\text{вдмт}} \cdot \eta_{\text{крн}} = [(T - T_0) / T] \cdot [2S_2 / (S_1 + S_2)]$, звідки оста-

точний вираз для температури: $T = \frac{2T_0 S_2}{2S_2 - \eta \cdot (S_1 - S_2)}$.

Задача 11.3.

У першому варіанті розташування лінзи його увігнута поверхня слугує увігнутим дзеркалом, фокусна відстань якого дорівнює $a = 5$ см. Отже, радіус увігнутої поверхні $R_y = 2a = 10$ см.

У другому варіанті розташування лінзи промені відбиваються від тієї ж самої увігнутої поверхні, але попередньо пройшовши крізь речовину лінзи. Таким чином,

$$\frac{1}{b} = 2D - \frac{1}{a}.$$

«Мінус» у формулі пов'язаний з тим, що у даному випадку увігнута поверхня лінзи слугує опуклим дзеркалом. Звідси оптична сила лінзи:

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{100}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \approx 18 \text{ дптр.}$$

Користуючись формулою для оптичної сили лінзи $D = (n - 1)(1/R_0 - 1/R_y)$, знайдемо радіус її опуклої поверхні:

$$R_0 = \left(\frac{1}{R_y} + \frac{D}{n-1} \right)^{-1} = \frac{R_y(n-1)}{R_y D + (n-1)} = \frac{2ab(n-1)}{a+bn} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0,5}{5+6 \cdot 1,5} \approx 2 \text{ (см).}$$

Задача 11.4.

Ймовірність зустрічі зайця й лисиці пропорційна добутку $N_1 N_2$. Тому рівняння для швидкостей зміни кількості лисиць та зайців з урахуванням їхніх зустрічей мають вигляд: $dN_1/dt = K_1 N_1 - A_1 N_1 N_2$ (1), $dN_2/dt = -K_2 N_2 + A_2 N_1 N_2$ (2), де $A_{1,2}$ – додатні константи.

Рівноважні кількості зайців та лисиць знайдемо, прирівнявши ліві частини рівнянь (1)-(2) до нуля: $N_{10}(K_1 - A_1 N_{20}) = 0$ (3), $N_{20}(-K_2 + A_2 N_{10}) = 0$ (4).

Розв'язок $N_{10} = N_{20} = 0$ не відповідає умові задачі, тому надалі працюватимемо з розв'язком $N_{10} = K_2/A_2$, $N_{20} = K_1/A_1$.

Підставивши до рівнянь (1)-(2) розв'язки у формі $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ та $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, отримаємо з урахуванням (3)-(4):

$$dn_1/dt = K_1 n_1 - A_1 N_{20} n_1 - A_1 N_{10} n_2 - A_1 n_1 n_2 \quad (5),$$

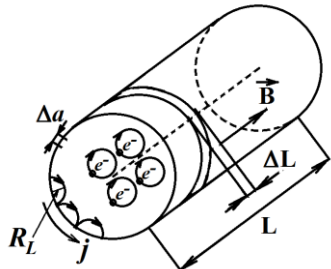
$$dn_2/dt = -K_2 n_2 + A_2 N_{20} n_1 + A_2 N_{10} n_2 + A_2 n_1 n_2 \quad (6).$$

В силу умови $|n_{1,2}(t)| \ll N_{10,20}$ знехтуємо в рівняннях (5)-(6) доданками, пропорційними $n_1 n_2$, поруч із доданками, лінійними за n_1 та n_2 . Крім того, врахуємо явний вигляд N_{10} та N_{20} . Отримаємо: $dn_1/dt = -(A_1 K_2/A_2) n_2$ (7), $dn_2/dt = (A_2 K_0/A_1) n_1$ (8).

З рівнянь (7)-(8) можна отримати одне диференціальне рівняння другого порядку вигляду $d^2 n_1/dt^2 + \omega^2 n_1 = 0$ (9), де $\omega = \sqrt{K_1 K_2}$ – (10) шукана частота.

Підставимо розв'язок для n_1 у формі $n_1 = C_1 \cos \omega t$ до рівняння (7) (за початок відліку часу прийнято максимальне значення популяції зайців). Отримаємо, що $n_2 = C_2 \sin \omega t$, де $C_2/C_1 = A_2 \sqrt{K_1}/A_1 \sqrt{K_2}$, а зсув фаз між коливаннями n_1 та n_2 складає $\pi/2$ (чверть періоду).

Задача 11.5. В магнітному полі електрони обертаються навколо магнітних силових ліній. У центральних областях плазми створені ними струми компенсуються. Але поблизу поверхні, в шарі товщиною порядку R_L (середній радіус обертання електронів у зовнішньому магнітному полі), струми виявляються нескомпенсованими і формують поверхневий струм стовпа. Швидкість



обертання електронів можна оцінити як їхню теплову швидкість v_{Te} з умови $mv_{Te}^2 \approx k_B T$, де k_B – стала Больцмана, m – маса електрона. В свою чергу, R_L визначимо з умови рівності відцентрової сили й сили Лоренца: $mv_{Te}^2/R_L = ev_{Te}B$, (e – елементарний заряд), звідки $R_L = \frac{mv_{Te}}{eB}$ (1)

В силу сказаного раніше густина поверхневого струму, спрямованого в азимутальному напрямку (по куту φ циліндричної системи координат, вісь якої збігається з віссю плазмового циліндра), може бути записана у формі

$$j_{нов} = ev_{Te}, \quad (2)$$

Нескомпенсований струм у приповерхневому шарі товщиною R_L та довжиною ΔL (в напрямку, паралельному до осі циліндра, див. рис.) дорівнюватиме

$$I_{нов} = j_{нов} R_L \Delta L = ev_{Te} R_L \Delta L = enmv_{Te}^2 \frac{1}{eB} \Delta L = \frac{nk_B T}{B} \Delta L, \quad (3)$$

Сила Ампера, зумовлена взаємодією цього струму з магнітним полем, спрямована в радіальному напрямку (до осі циліндра). Виділимо малий прямокутний елемент на поверхні циліндра розміром $\Delta L \times \Delta a$. Тоді сила Ампера, що діє на струм (3) має вигляд $F_A = I_{нов} B \Delta a$, (4)

а тиск (сила на одиницю площі поверхні) – $p = \frac{F_A}{\Delta L \Delta a} = B \frac{nk_B T}{B} \frac{\Delta L \Delta a}{\Delta L \Delta a} = nk_B T$. (5)

Як бачимо, вона компенсує газокінетичний тиск електронів плазми.

Для знаходження магнітного поля ΔB , створеного в плазмі поверхневим струмом (2) і спрямованого проти зовнішнього поля B , скористаємося відомою формулою для поля всередині довгого соленоїда (тут враховано, що $\mu = 1$):

$$\Delta B = \mu_0 \frac{I_{нов} N}{L} = \mu_0 \frac{I_{нов}}{\Delta L} = \mu_0 \frac{nk_B T}{B}. \quad (6)$$

тут L – повна довжина соленоїда, N – загальна кількість витків.

Як бачимо, в плазмовому стовпі поле виявляється меншим від зовнішнього. Це явище відоме як діамagnetизм плазми.